Concursul "Recreaţii Matematice"
Ediţia a VII-a, Durău, 28 august 2009

Clasa a V-a

1. a) Completaţi şirul următor cu încă trei termeni: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

b) Puneţi paranteze în expresia $2 \cdot 12 + 18 : 6 + 1$ astfel încât rezultatul să fie numărul natural cel mai mic posibil.

2. Câtul împărţirii a două numere naturale este 3 iar restul este 4. Dacă dublăm deîmpărţitul şi păstrăm împărţitorul, atunci restul obţinut este 3. Determinaţi numerele iniţiale.

3. Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 336. Din această carte se rup, la întâmplare, 111 foi. Să se arate că:

a) suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10;

b) produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

Clasa a VI-a

1. a) Utilizând operaţiile cunoscute (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea sau ridicarea la putere) determinaţi cel mai mare număr natural care se poate scrie, folosind o singură dată cifrele 1, 2 şi 3. Justificaţi. **Petre Bătrâneţu**

b) Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Să se arate că, dacă ultima cifră a numărului $a^2 + b^2$ este 9, atunci ultima cifră a lui $(a + b)^2$ este tot 9. **Recreaţii Matematice - 2/2007**

2. Într-un regat sunt 2009 oraşe. Regele a poruncit să se realizeze drumuri între oraşe astfel încât din fiecare oraş să pornească exact 5 drumuri. Au putut supuşii să îndeplinească ordinul regelui? **Mihai Crăciun**

3. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 98\}$. Arătaţi că oricum am alege 50 de elemente ale lui A, există două printre ele având suma cub perfect. **Titu Zvonaru**

Clasa a VII-a

1. a) Fie numărul $A=\overline{\underbrace{aa...aa}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{bb...bb}_{\text{de } n \text{ ori}}}$. Arătaţi că $A=\dfrac{10^n-1}{3}\cdot\left[\dfrac{a(10^n-1)}{3}+\dfrac{a+b}{3}\right]$.

b) Arătaţi că numărul $B = \overline{\underbrace{44...4}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{22...2}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ poate fi scris ca un produs de două numere naturale consecutive. **Mihai Crăciun**

2. Demonstraţi că triunghiul determinat de picioarele bisectoarelor unui triunghi cu un unghi de măsură 120^0 este dreptunghic.

3. Fie m şi n numere naturale nenule cu proprietatea că $m \leq 1 + 2 + ... + n$. Să se arate că m poate fi scris ca suma câtorva numere distincte dintre numerele $1, 2, ..., n$, unde $n \geq 3$. **Recreaţii Matematice - 2/2008**

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Dacă $x^{2010}+y^{2010}$ se divide cu 11, arătaţi că $x+y$ se divide cu 11.

Andrei Nedelcu

2. Fie triunghiul $\triangle ABC$ înscris în cercul $C(O,R)$. Se cere locul geometric al punctelor M din planul triunghiului, pentru care are loc relaţia $MA^2+MB^2+MC^2=3R^2$.

Dan Brânzei

3. Determinaţi x,y,z pentru care $\frac{1}{2^x}+\frac{3}{2^y}+\frac{1}{2^z}=2^x+3\cdot 2^{y+2}+2^{z+2}=9$.

Recreaţii Matematice - 1/2008

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi, în necunoscuta $(x;y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, ecuaţia $x^{2009}+y^{2009}=x^{2010}+y^{2010}$.

2. Într-un careu cu 41 linii şi 49 coloane se scriu la întâmplare 2009 numere reale distincte. Fie A mulţimea ce are ca elemente cele mai mici numere de pe fiecare linie, respectiv B mulţimea ce are ca elemente cele mai mari numere de pe fiecare coloană. Determinaţi probabilitatea ca cel mai mare element din mulţimea A să fie chiar cel mai mic element din mulţimea B.

3. Fie D un punct în planul unui triunghi echilateral $\triangle ABC$ încât $BD=DC$, $m(\sphericalangle BDC)=30^0$ şi dreapta BC separă A şi D. Dacă $E\in(BD)$ şi $m(\sphericalangle BAE)=15^0$, să se arate că $CE\perp AC$.

Recreaţii Matematice - 2/2007

Clasa a X-a

1. Rezolvaţi, în necunoscuta $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ecuaţia $x\cdot(x+2)\cdot(x+8)=3^y$.

2. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ACB)=80^0$ şi $P\in(AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BPC)=30^0$. Arătaţi că $AP=BC$.

3. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, pentru care are loc egalitatea $2\cdot f(n+3)\cdot f(n+2)=f(n+1)+f(n)+1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Recreaţii Matematice - 2/2007

Clasa a XI-a

1. Fie triunghiul $\triangle ABC$ nedreptunghic. Paralela prin B la AC şi simetrica dreptei AC în raport cu BC se intersectează în A_1; analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Dacă dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, să se arate că triunghiul $\triangle ABC$ este echilateral.

Recreaţii Matematice - 1/2006

2. Fie funcţia $f:A\to A$, unde A este o mulţime finită din $\mathbb{R}$. Dacă $|f(x)-f(y)|<|x-y|, \forall x,y\in A$, $x\neq y$, să se arate că funcţia f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Lucian Georges Lăduncă

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit recurent prin $x_1\in\mathbb{N}, x_{n+1}=\left[\frac{3x_n}{2}\right]+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Este posibil să alegem x_1 număr natural, astfel încât primii 2008 termeni ai şirului să fie numere pare şi al 2009-lea să fie impar?

Lucian Georges Lăduncă

Clasa a XII-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_1\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $x_{n+1}=2x_n-\operatorname{tg} x_n, \forall n\geq 1$. Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{-x_n}$.

Recreaţii Matematice - 1/2006

2. Să se determine funcţiile derivabile $f:I\to(0;+\infty)$ şi intervalul $I\subset\mathbb{R}$, ştiind că $f(0)=1$ şi $f^3(x)+f'(x)=0$, $\forall x\in I$.

Gabriel Mîrşanu

3. Fie funcţia $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ derivabilă pe $(0;1)$ cu $g(0)=0$, iar $f:[0;1]\to\mathbb{R}_+$ o funcţie cu proprietatea $f(x)=g'(x)$, $\forall x\in[0;1]$. Să se arate că există cel puţin un punct $c\in(0;1)$ astfel încât $\frac{\pi}{2}\cdot g(c)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}c\right)<f(c)$.

Gabriel Mîrşanu