Problema G128 – comentarii

Marian Tetiva[1]

Abstract. This Note offers a discussion on the conditions ensuring the validity of inequality G128 that was proposed in *Recreaţii Matematice* No. 2/2007 and "solved" in No. 2/2008 of the same journal.

Keywords: Cauchy-Schwarz inequality.

MSC 2000: 97B99.

Dl **Dumitru Barac** din Sibiu observă, într-o scrisoare trimisă redacţiei, că în soluţia *Problemei G128* [**1**] s-a strecurat o greşeală. Şi are perfectă dreptate, sensul inegalităţii Cauchy-Schwarz folosite acolo în forma

$$\frac{x^2}{2x^2+(t-1)xy}+\frac{y^2}{2y^2+(t-1)yz}+\frac{z^2}{2z^2+(t-1)zx}\leq$$
$$\leq\frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+(t-1)(xy+yz+zx)}$$

trebuie să fie (corect) sensul contrar - ceea ce anulează demonstraţia publicată.

Problema cerea să se arate că are loc inegalitatea

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t}\leq\frac{3}{t+1} \tag{1}$$

pentru orice $t\in[1,5]$ şi orice numere pozitive a, b şi c cu produsul $abc=1$. Iată ce am reuşit să demonstrăm:

Inegalitatea (1) *are loc pentru orice* $t\in[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$ *şi orice* $a,b,c\in[(\sqrt{2}-1)\sqrt{t},(\sqrt{2}+1)\sqrt{t}]$ *pentru care* $abc=1$.

Demonstraţia utilizează o intercalare (să-i spunem cu medii) uzuală în asemenea inegalităţi; anume, arătăm că, în ipotezele anunţate, au loc inegalităţile

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t}\leq\frac{2\sqrt{ab}}{ab+t}+\frac{c}{c^2+t}\leq\frac{3}{t+1}$$

(care implică inegalitatea din G128). Prima inegalitate este succesiv echivalentă cu

$$\frac{(a+b)(ab+t)}{(a^2+t)(b^2+t)}\leq\frac{2\sqrt{ab}}{ab+t}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\leq\frac{(a^2+t)(b^2+t)}{(ab+t)^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2\sqrt{ab}}\leq\frac{t(a-b)^2}{(ab+t)^2}\Leftrightarrow(ab+t)^2\leq2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2t.$$

Ultima inegalitate se mai scrie $a^2b^2+t^2\leq2\sqrt{ab}(a+b+\sqrt{ab})t$ şi rezultă folosind tot o intercalare

$$a^2b^2+t^2\leq6abt\leq2\sqrt{ab}(a+b+\sqrt{ab})t.$$

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Aici avem $a^2b^2 + t^2 \le 6abt$ deoarece $ab \in [(3-2\sqrt{2})t, (3+2\sqrt{2})t]$ (conform ipotezei), iar a doua inegalitate rezultă din $3\sqrt{ab} \le a + b + \sqrt{ab}$.

Pentru
$$\frac{2\sqrt{ab}}{ab+t} + \frac{c}{c^2+t} \le \frac{3}{t+1}$$
să notăm $x = \sqrt{c}$ ($\Leftrightarrow c = x^2$) şi să înlocuim ab cu $1/c = 1/x^2$. Avem de demonstrat că
$$f(x) = \frac{2x}{1+tx^2} + \frac{x^2}{x^4+t} \le \frac{3}{1+t}$$
pentru $x^2 = c \in [(\sqrt{2}-1)\sqrt{t}, (\sqrt{2}+1)\sqrt{t}]$.

Să remarcăm că aceste inegalităţi implică $x \in [(3-2\sqrt{2})t, (3+2\sqrt{2})t]$. Într-adevăr, avem
$$x^2 = c \le (\sqrt{2}+1)\sqrt{t} \le (\sqrt{2}+1)^4 t^2$$
şi
$$x^2 = c \ge (\sqrt{2}-1)\sqrt{t} \ge (\sqrt{2}-1)^4 t^2,$$
folosind şi $\sqrt{2}-1 \le \sqrt{t} \le \sqrt{2}+1$. Dar atunci vom avea $x^2 - 6tx + t^2 \le 0$ şi vom putea arăta că funcţia f are un maxim în 1 pe intervalul $[(3-2\sqrt{2})t, (3+2\sqrt{2})t]$. Pentru asta calculăm
$$f'(x) = 2\left(\frac{1-tx^2}{(1+tx^2)^2} + \frac{tx-x^5}{(x^4+t)^2}\right),$$
ceea ce va conduce la următoarea expresie pentru $(1+tx^2)^2(x^4+t)^2 f'(x)/2$:
$$\begin{aligned}&(1-tx^2)(x^8+2tx^4+t^2) + (tx-x^5)(1+2tx^2+t^2x^4) =\\ &= (1-x^3)(t+x)[t(x^6+1) + 4tx^3 - x^4 - t^2x^2]\end{aligned}$$
(nu există altă modalitate de a ajunge aici decât aceea în care calculăm; doar calculăm!). Deoarece paranteza pătrată este nenegativă:
$$t(x^6+1) + 4tx^3 - x^4 - t^2x^2 \ge 2tx^3 + 4tx^3 - x^4 - t^2x^2 = x^2(6tx - x^2 - t^2) \ge 0$$
(conform celor observate puţin mai sus) rezultă că f creşte de la $(3-2\sqrt{2})t$ la 1 şi descreşte pe intervalul $[1, (3+2\sqrt{2})t]$, deci are un maxim în 1, aşa cum am anunţat. Inegalitatea $f(x) \le f(1)$ (pentru x cuprins între $(3-2\sqrt{2})t$ şi $(3+2\sqrt{2})t$) este cea care ne trebuie pentru a încheia demonstraţia.

(Merită un studiu separat cazurile $t = 3-2\sqrt{2}$ şi $t = 3+2\sqrt{2}$, când $6t - 1 - t^2 = 0$, deci paranteza pătrată de mai sus se anulează şi ea pentru $x = 1$; se va vedea că inegalitatea rămâne valabilă, 1 fiind acum una din extremităţile intervalului $[(3-2\sqrt{2}t, (3+2\sqrt{2})t]$.)

Bibliografie

1. **T. Zvonaru, B. Ioniţă** - *Soluţia problemei G128*, Recreaţii Matematice, 2/2008, p. 161.