Generalizarea unei identităţi şi aplicaţii

Lucian TUŢESCU[1]

Abstract. In this Note, the identity (1) is generalized as (2). Two applications are also given.
Keywords: identity, polynomial, divisibility, composed number.
MSC 2000: 13M10.

Identitatea pe care o vom generaliza şi utiliza în aplicaţii este

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca), \forall a,b,c\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Pentru a o demonstra considerăm

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc;$$

avem

$$\begin{aligned}P(a)&=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,\\ P(b)&=b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0,\\ P(c)&=c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.\end{aligned}$$

Adunând relaţiile de mai sus membru cu membru, obţinem

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=0,$$

de unde deducem identitatea (1).

Vom folosi această identitate binecunocută în rezolvarea câtorva probleme.

Propoziţie. *Arătaţi că are loc următoarea identitate:*

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt= \tag{2}$$
$$=(x+y+z+t)(x^2+y^2+z^2+t^2-xy-xz-xt-yz-yt-zt), \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}.$$

Într-adevăr, avem egalităţile:

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y+z+t-t)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),\\ x^3+y^3+t^3-3xyt&=(x+y+z+t-z)(x^2+y^2+z^2-xy-yt-tx),\\ x^3+z^3+t^3-3xzt&=(x+y+z+t-y)(x^2+z^2+t^2-xz-zt-tx),\\ y^3+z^3+t^3-3yzt&=(x+y+z+t-x)(y^2+z^2+t^2-yz-zt-ty),\end{aligned}$$

care, adunate membru cu membru, conduc la:

$$\begin{aligned}&3(x^3+y^3+z^3+t^3)-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt=\\ &=(x+y+z+t)(3x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\\ &-(x+y+z+t)(2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt)-\\ &-t(x^2+y^2+z^2+t^2-t^2)-z(x^2+y^2+z^2+t^2-z^2)-\\ &-y(x^2+y^2+z^2+t^2-y^2)-x(x^2+y^3+z^2+t^2-x^2)+\\ &+3(xyz+xyt+xzt+yzt),\end{aligned}$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova

de unde, în urma unor calcule simple, obţinem (2).

Observaţie. Identitatea (1) se obţine din (2) luând $t = 0$. Dacă în (2) luăm $z = t = 0$, vom obţine $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$.

Aplicaţia 1. *Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ şi nu toate egale. Arătaţi că dacă $x + y + z$ divide $x^3 + y^3 + z^3$, atunci numărul $x + y + z$ este compus.*

Presupunând că $x+y+z$ este număr prim şi ţinând seama de ipoteză şi identitatea (1), rezultă că $x+y+z$ divide produsul $3xyz$, de unde deducem că $x+y+z|3$, $x+y+z|x$, $x + y + z|y$ sau $x + y + z|z$. Cum, însă, $x + y + z \geq 1 + 1 + 2 = 4$ şi $x + y + z > x$, $x+y+z > y$, $x+y+z > z$, se ajunge la o contradicţie. Aşadar, $x+y+z$ este număr compus.

Aplicaţia 2. *Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz$. Arătaţi că $x^3 + y^3 + z^3$ se divide cu $x + y + z + 6$.*

Relaţia din enunţul problemei se mai scrie $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \dfrac{xyz}{2}$. Combinând aceasta cu identitatea (1), obţinem

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{xyz}{2}(x + y + z + 6).$$

Datorită acestei relaţii putem afirma că nu toate numerele x, y, z sunt impare (în caz contrar, ar rezulta că şi $x + y + z + 6$ este impar, ceea ce-i imposibil). Dacă măcar unul dintre x, y şi z este par, aceeaşi relaţie ne arată că $x + y + z + 6|x^3 + y^3 + z^3$.

Recreații ... matematice

1. *Cu numerele $1, 3, 4, 6$, luate în ordinea pe care o doriţi şi punând între ele în mod convenabil semnele celor patru operaţii aritmetice şi, eventual, paranteze, obţineţi ca rezultat fiecare dintre numerele: $21, 22, 23, 24$ şi 25.*

2. *În tabelul de mai jos, obţineţi rezultatul 7 punând semne convenabile de operaţii matematice sau paranteze:*

1	1	1	1	=	7
2	2	2	2	=	7
3	3	3	3	=	7
4	4	4	4	=	7
5	5	5	5	=	7
6	6	6	6	=	7
7	7	7	7	=	7
8	8	8	8	=	7
9	9	9	9	=	7

N.B. Puteţi găsi răspunsurile la pag. 36.