O extensiune a şirului Fibonacci

Petru MINUŢ[1], ***Cristina SIMIRAD***[2]

Abstract. A sequence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ and $v_{n+2} = av_{n+1} + v_n$, where $a \in \mathbb{N}^*$, is considered. Properties of this sequence are revealed , some of them being similar to those of Fibonacci′s sequence.

Keywords: Fibonacci′s sequence, matrix, characteristic equation, Binet′s formula.

MSC 2000: 11B39.

Şirul Fibonacci este şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determinat de recurenţa:

(1) $$F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

El poate fi definit şi prin egalităţile matriceale:

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \text{ (cu convenţia } F_{-1} = 1).$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$ relaţia (2) devine $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce este adevărat. Apoi, dacă (2) este adevărată pentru n, vom avea
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$
deci (2) este adevărată şi pentru $n + 1$.

Ne punem problema găsirii şirurilor $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite cu ajutorul unei matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, prin

(3) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} v_{n+1} & v_n \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece pentru $n = 0$ avem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, relaţia (3) ne va da, în acest caz, $v_1 = 1$, $v_0 = 0$ şi $v_{-1} = 1$, iar egalitatea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} v_2 & v_1 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix}$ se scrie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi conduce la $v_2 = a$, $b = c = 1$ şi $d = 0$. Prin urmare, A este de forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi (3) se scrie

(4) $$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} v_{n+1} & v_n \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

[1]Prof. univ., Univ. "Al.I. Cuza", Iaşi
[2]Profesoară, Şcoala nr. 10 "Gh. Brătianu", Iaşi

Din faptul că

$$\begin{pmatrix} v_{n+2} & v_{n+1} \\ v_{n+1} & v_n \end{pmatrix} = A^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n+1} & v_n \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_{n+1} + v_n & av_n + v_{n-1} \\ v_{n+1} & v_n \end{pmatrix}$$

rezultă imediat că şirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce are $v_0 = 0$ şi $v_1 = 1$, satisface relaţia

$$v_{n+2} = av_{n+1} + v_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Numim $(v_n)_n$, dat de (5) şi $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, *şir generalizat al lui Fibonacci.* Vom vedea mai jos că multe proprietăţi ale şirului $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al lui Fibonacci rămân valabile şi în acest caz şi cu aceleaşi demonstraţii ([**2**], [**3**]).

Ecuaţia caracteristică ataşată şirului $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este

$$x^2 - ax - 1 = 0,$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4})$ şi $x_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2+4})$.

Să înlăturăm cazul $a = 0$, care este banal. Observăm că $a^2 + 4$ nu poate fi pătrat perfect: pentru $a = 1$ avem $a^2 + 4 = 5$, iar pentru $a \geq 2$ avem $a^2 < a^2 + 4 < (a+1)^2$. Adoptăm notaţia $\phi = x_1$, deci $x_2 = \overline{\phi}$ (conujugatul lui ϕ). Se ştie ([**1**], [**3**]) că termenul general al şirului (5) este de forma

$$v_n = A\phi^n + B\overline{\phi}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $n = 0$ şi $n = 1$ obţinem sistemul de ecuaţii: $A+B = v_0 = 0$ şi $A\phi+B\overline{\phi} = v_1 = 1$ din care deducem $A = -B = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$. Înlocuind aceste constante, deducem formula de tip Binet

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(\phi^n - \overline{\phi}^n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Mai întâi , vom enumera câteva proprietăţi elementare ale şirului $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1° $\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{a}(v_{n+1} + v_n - 1)$.

Într-adevăr, ţinând seama de (5), avem $av_k = v_{k+1} - v_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Sumând membru cu membru aceste egalităţi, vom obţine pe cea dorită.

2° $\sum_{k=1}^{n} v_{2k-1} = \frac{1}{a} v_{2n}$.

Avem: $av_{2k-1} = v_{2k} - v_{2k-2}$, $k = \overline{1,n}$. Sumăm membru cu membru.

3° $\sum_{k=1}^{n} v_{2k} = \frac{1}{a}(v_{2n+1} - 1)$.

La fel, pornind de la $av_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k-1}$, $k = \overline{1,n}$.

4° $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} v_k = \frac{1}{a}(v_{2n} - v_{2n+1} + 1)$.

Într-adevăr, $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}v_k = \sum_{k=1}^{n} v_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{a}v_{2n} - \frac{1}{a}(v_{2n+1} - 1) = \frac{1}{a}(v_{2n} - v_{2n+1} + 1)$.

5° $\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \frac{1}{a}v_n \cdot v_{n+1}$.

Observăm că $v_k v_{k+1} - v_{k-1}v_k = v_k(v_{k+1} - v_{k-1}) = av_k^2$ şi sumăm pentru $k = \overline{1,n}$.

6°. $v_{m+n} = v_{m-1}v_n + v_m v_{n+1}$; în particular, $v_{2n} = \frac{1}{a}(v_{n+1}^2 - v_{n-1}^2)$.

Se poate arăta prin inducţie după n sau în felul următor: egalitatea $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$, cu A^n dat de (4), devine:

$$\begin{pmatrix} v_{m+1} & v_m \\ v_m & v_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n+1} & v_n \\ v_n & v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{m+n+1} & v_{m+n} \\ v_{m+n} & v_{m+n-1} \end{pmatrix}.$$

Se efectuează produsul matricelor şi se scrie apoi egalitatea elementelor situate pe linia a doua şi coloana întâi.

Se numeşte *funcţie generatoare* a unui şir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funcţia F dată de $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.

Teorema 1. *Funcţia generatoare a şirului* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este*

$$F(x) = \frac{x}{1 - ax - x^2}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned} F(x) &= v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_{n+2}x^{n+2} + \ldots \\ -axF(x) &= -av_0 x - av_1 x^2 - \ldots - av_{n+1}x^{n+2} + \ldots \\ -x^2F(x) &= -v_0 x^2 - \ldots - v_n x^{n+2} + \ldots \end{aligned}$$

Sumând, se obţine $(1-ax-x^2)F(x) = v_0 + (v_1 - av_0)x$ sau, deoarece $v_0 = 0$ şi $v_1 = 1$, $(1 - ax - x^2)F(x) = x$, de unde rezultă (7).

Observaţie. Conform teoremei precedente, şirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şirul coeficienţilor câtului împărţirii polinomului x la $1 - ax - x^2$.

Următoarele patru teoreme indică proprietăţi de divizibilitate ale şirului (5).

Teorema 2. *Dacă* d/n, *atunci* v_d/v_n.

Demonstraţie. Fie $n = dm$. Vom avea:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(\phi^n - \overline{\phi}^n) = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(\phi^{dm} - \overline{\phi}^{dm}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(\phi^d - \overline{\phi}^d)(\phi^{d(m-1)} + \phi^{d(m-2)}\overline{\phi}^d + \ldots + \overline{\phi}^{d(m-1)}) = v_d M, \end{aligned}$$

unde M este un polinom simetric în ϕ şi $\overline{\phi}$, rădăcinile ecuaţiei $x^2 - ax - 1 = 0$. Conform teoremei fundamentale a polinoamelor simetrice, M va fi un polinom cu coeficienţi întregi în coeficienţii acestei ecuaţii. Pin urmare, M este un întreg şi $v_d|v_n$.

Teorema poate fi demonstrată şi pe baza relaţiei 6° şi procedând prin inducţie după d.

Teorema 3. *Dacă n este număr compus, $n \neq 4$, atunci v_n este număr compus.*

Demonstraţie. $v_4 = a^3+2a$ este prim pentru $a = 1$. Dacă $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 \leq n_2$, cel puţin $n_2 \geq 2$, deci $v_{n_2} > 1$, $v_{n_2} < v_n$ şi $v_{n_2} | v_n$.

Teorema 5. $(v_{n+1}, v_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. $(v_{n+1}, v_n) = (av_n + v_{n-1}, v_n) = (v_n, v_{n-1}) = \ldots = (v_1, v_0) = 1$.

Teorema 6. $(v_m, v_n) = v_{(m,n)}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Se face pe baza algoritmului lui Euclid şi cu utilizarea proprietăţii 6° şi Teoremei 5. Pentru detalii se pot vedea [**2**], [**3**].

Încheiem cu o proprietate de aproximare:

Teorema 7. *v_n este numărul întreg cel mai apropiat de termenul de rang n al progresiei geometrice cu termenul de rangul zero egal cu $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$ şi raţia ϕ.*

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$\left| v_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{a^2+4}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(\phi^n - \overline{\phi}^n) - \frac{\phi^n}{\sqrt{a^2+4}} \right| =$$

$$= \frac{|\overline{\phi}|^n}{\sqrt{a^2+4}} = \frac{(\sqrt{a^2+4} - a)^n}{2^n\sqrt{a^2+4}} < \frac{2^n}{2^n\sqrt{a^2+4}} < \frac{1}{2}.$$

Bibliografie

1. **A. Markuşevici** – *Şiruri recurente*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1954.
2. **P. Minuţ, C. Simirad** – *Numere prime. Numere prime speciale*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.
3. **N.N. Vorobiev** – *Numerele lui Fibonacci*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1953.