Inegalitatea $H \leq G \leq A$ revizitată

Vasile CHIRIAC[1], ***Bogdan CHIRIAC***[2]

Abstract. In this Note, a new proof of the inequality $H \leq G \leq A$ is given, together with a couple of applications of this inequality.

Keywords: arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean.

MSC 2000: 97D99.

Fie $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ numere reale; notăm cu A, G, H mediile aritmetică, geometrică şi respectiv armonică, adică

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Matematicianul englez **Colin Maclaurin** (1698-1746), în lucrarea sa *Algebra* apărută postum, în 1748, a arătat relaţia $H \leq G \leq A$ ([**2**], p.30; [**1**] p.43, 44). Se cunosc multe demonstraţii pentru această inegalitate. Ne propunem să dăm o nouă demonstraţie.

Lemă. *Pentru orice x, $y > 0$ reale şi $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea:*

$$x^n + y^n \geq x^{n-1} \cdot y + y^{n-1} \cdot x \tag{1}$$

Demonstraţie. Cum $x - y$ şi $x^{n-1} - y^{n-1}$ au acelaşi semn, oricare ar fi x, $y > 0$, putem scrie $(x - y) \cdot \left(x^{n-1} - y^{n-1}\right) \geq 0$, de unde rezultă (1).

Teoremă. *Oricare ar fi numerele reale $x_i > 0$ cu $i = \overline{1, n}$ şi $n \geq 2$, avem:*

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n \geq n \cdot x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \tag{2}$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 2$ se obţine binecunoscuta inegalitate $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n-1$ numere şi o vom demonstra pentru n. Putem scrie următoarele inegalităţi:

$$\begin{array}{rcr}
x_1^n + x_2^n \geq x_1^{n-1} \cdot x_2 + x_2^{n-1} \cdot x_1 & \ldots & x_1^n + x_n^n \geq x_1^{n-1} \cdot x_n + x_n^{n-1} \cdot x_1 \\
x_2^n + x_3^n \geq x_2^{n-1} \cdot x_3 + x_3^{n-1} \cdot x_2 & \ldots & x_2^n + x_n^n \geq x_2^{n-1} \cdot x_n + x_n^{n-1} \cdot x_2 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & x_{n-1}^n + x_n^n \geq x_{n-1}^{n-1} \cdot x_n + x_n^{n-1} \cdot x_{n-1}
\end{array}$$

Adunând membru cu membru şi grupând convenabil găsim:

$$(n-1)\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right) \geq x_1(x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}) + \\ + x_2\left(x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}\right) + \ldots + x_n\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}\right).$$

Ţinând seamă de presupunerea făcută, obţinem $(n-1)\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right) \geq$ $\geq x_1 \cdot (n-1)\, x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_2 \cdot (n-1)\, x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_{n-1} \cdot (n-1)\, x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot$ $x_{n-2} \cdot x_n + x_n \cdot (n-1)\, x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$,
de unde se deduce inegalitatea de demonstrat pentru n numere.

Consecinţă. *Dacă $a_i > 0$, $i = \overline{1,\ n}$ şi $n \geq 2$, atunci are loc relaţia $H \leq G \leq A$.*

[1]Profesor, Liceul "V. Alecsandri", Bacău

[2]Student, Facultatea de matematică, Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi

Demonstraţie. În (2), luând $x_1 = \sqrt[n]{a_1},\ x_2 = \sqrt[n]{a_2},\ \ldots, x_n = \sqrt[n]{a_n}$ obţinem $A \geq G$, iar pentru $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_2}},\ \ldots,\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ obţinem $G \geq H$.

Aplicaţie. *Fie* $a_i > 0,\ i = \overline{1,\ n}$ *şi* $n \geq 4$. *Să se arate că:*

$$\frac{a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} + \frac{a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_2}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}a_n + a_na_1 + a_1a_{n-1}}{a_{n-1}^3 + a_n^3 + a_1^3} +$$

$$+ \frac{a_na_1 + a_1a_2 + a_2a_n}{a_n^3 + a_1^3 + a_2^3} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Soluţie. Din $a_i^3 + a_j^3 + a_k^3 \geq 3a_ia_ja_k$, avem $\dfrac{1}{a_i^3 + a_j^3 + a_k^3} \leq \dfrac{1}{3a_ia_ja_k}$, oricare ar fi $i,\ j,\ k = \overline{1,n}, i \neq j \neq k \neq i$. Deci $\dfrac{a_ia_j + a_ja_k + a_ka_i}{a_i^3 + a_j^3 + a_k^3} \leq \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{a_k} + \dfrac{1}{a_i} + \dfrac{1}{a_j}\right)$ şi, sumând, deducem inegalitatea dorită.

Lăsăm în seama cititorului să demonstreze inegalităţile următoare :
1) Fie $a > 0,\ b > 0$ cu proprietatea că $a + b = 1$. Să se arate că

$$\sqrt[6]{32 + \frac{1}{a^5}} + \sqrt[6]{32 + \frac{1}{b^5}} \geq 4.$$

2) Oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ n \geq 3$, avem

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n-1}^2 + a_n^2} + \frac{a_n + a_1}{a_n^2 + a_1^2} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

3) Fie $a_i > 0,\ i = \overline{1,n}$, astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{\left(n^2 + 1\right)^2}{n}.$$

4) Să se arate că în orice triunghi ABC au loc inegalităţile:
$i)$ $a \cdot \sin\dfrac{A}{2} + b \cdot \sin\dfrac{B}{2} + c \cdot \sin\dfrac{C}{2} \geq 3p\left(\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$;
$ii)$ $a \cdot \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + b \cdot \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + c \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} \geq 6p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

Bibliografie

1. V. Chiriac - *Matematică. Fundamentele Algebrei*, Editura Sigma, 2007.

2. N. Mihăileanu - *Istoria Matematicii*, vol. 2, Ed. Şt. şi Enciclop., 1981.

3. - *Gazeta Matematică*, seriile A, B, 1969-2009.