O inegalitate ponderată cu medii

Gheorghe CIORESCU, Adrian SANDOVICI [1]

Abstract. A refinement of the inequality of the means, $m_a \geq m_g$, is given by inequalities (2) and (5), with the condition $p \geq (n-1)q$.
Keywords: arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, Sturm′s method.
MSC 2000: 97D99.

Considerăm $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi numerele strict pozitive a_i, $1 \leq i \leq n$. Notăm cu m_a, m_g, m_h mediile aritmetică, geometrică şi respectiv armonică ale acestor numere.

Scopul acestei note este de a demonstra o inegalitate de tipul

$$p \cdot m_a + q \cdot m_h \geq (p+q) \cdot m_g, \tag{1}$$

cu p şi q numere reale strict pozitive. Observăm că (1) poate fi privită ca o rafinare a inegalităţii $m_a \geq m_g$.

Propoziţia 1. *Are loc inegalitatea*

$$(n-1)m_a + m_h \geq n \cdot m_g, \tag{2}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţie. Avem

$$(n-1)m_a + m_h = n \cdot \frac{m_a + \ldots + m_a + m_h}{n} \geq n \sqrt[n]{m_a^{n-1} \cdot m_h}.$$

Ca urmare, este suficient să arătăm că are loc inegalitatea

$$\sqrt[n]{m_a^{n-1} \cdot m_h} \geq m_g \quad \text{sau} \quad m_a^{n-1} \cdot m_h \geq m_g^n. \tag{3}$$

Să notăm $x_i = a_i / \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $1 \leq i \leq n$, şi să observăm că $x_i \in (0,1)$, $1 \leq i \leq n$, şi $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. După calcule elementare, inegalitatea (3) se rescrie sub forma

$$S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-1} \leq n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} x_{j_k} \right) \leq \frac{1}{n^{n-2}}. \tag{4}$$

Vom demonstra această inegalitate folosind metoda lui Sturm. Presupunem că x_1 şi x_2 sunt astfel încât $x_1 < x_2$. Considerăm numerele $x_1' = x_1 + \varepsilon$ şi $x_2' = x_2 - \varepsilon$ aşa ca $x_1 < x_1' < x_2' < x_2$ şi $x_k' = x_k$, $3 \leq k \leq n$. Este clar că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i' = 1$ şi $x_i' \in (0,1)$,

[1] Profesori, Colegiul Naţional "Petru Rareş", Piatra Neamţ

$1 \le i \le n$. Vom avea

$$S_n(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x'_1 x'_2 \left(\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_{n-3} \le n} \left(\prod_{k=1}^{n-3} x'_{j_k} \right) \right) + (x'_1 + x'_2) \prod_{j=3}^{n} x'_j =$$

$$= (x_1 x_2 + \varepsilon(x_2 - x_1 - \varepsilon)) \left(\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_{n-3} \le n} \left(\prod_{k=1}^{n-3} x_{j_k} \right) \right) + (x_1 + x_2) \prod_{j=3}^{n} x_j =$$

$$= S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon(x_2 - x_1 - \varepsilon) \left(\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_{n-3} \le n} \left(\prod_{k=1}^{n-3} x_{j_k} \right) \right) >$$

$$> S_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Rezultă că suma $S_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ îşi atinge maximul atunci când numerele x_i sunt egale, adică pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dfrac{1}{n}$. De aici, se obţine inegalitatea (4) şi, ca urmare, (2) este dovedită.

În sfârşit, are loc egalitatea în (2) dacă şi numai dacă mediile m_a, m_g şi m_h sunt egale, adică dacă şi numai dacă numerele a_i, $1 \le i \le n$, sunt egale.

Observaţie. În membrul întâi al inegalităţii (2) nu putem lua mai mulţi termeni egali cu m_h, adică nu este adevărată inegalitatea $(n-k)m_a + k \cdot m_h \ge n \cdot m_g$ pentru $k \ge 2$. Un exemplu în acest sens este următorul: $n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ şi $a_3 = 9$.

O formă mai generală a inegalităţii (2) este dată de

Propoziţia 2. *Are loc inegalitatea*

$$p \cdot m_a + q \cdot m_h \ge (p+q) m_g, \tag{5}$$

unde p, q sunt numere reale strict pozitive ce verifică condiţia $p \ge (n-1)q$. În (5) are loc egalitate dacă şi numai dacă numerele $a_i (1 \le i \le n)$ sunt egale.

Demonstraţie. Ţinând cont de (2), avem

$$\begin{aligned} p \cdot m_a + q \cdot m_h = [p - (n-1)q] m_a + q[(n-1)m_a + m_h] \ge \\ [p - (n-1)q] m_g + qn \cdot m_g = (p+q) m_g, \end{aligned}$$

de unde (5). Ultima afirmaţie din enunţ se stabileşte cu uşurinţă.

Vom încheia cu câteva aplicaţii directe ale rezultatului de mai sus.

Aplicaţia 1 (*Problema 26013*, G.M.-7-8/2008). *Să se arate că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea*

$$a + b + c + \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \ge 4\sqrt[3]{abc}.$$

Soluţie. Pentru $n = 3$, $p = 3$ şi $q = 1$ luaţi în Propoziţia 2, obţinem rezultatul problemei.

Aplicaţia 2. *Fie $a, b, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ cu $p \geq 2q$. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ inecuaţia*

$$p(x^2+x+1)+\frac{9qx^2}{x^2+x+1} \leq 3(p+q)x. \tag{6}$$

Soluţie. Pentru $n = 3$, $a = x^2$, $b = x$ şi $c = 1$, relaţia (5) devine

$$p(x^2+x+1)+\frac{9qx^2}{x^2+x+1} \geq 3(p+q)x. \tag{7}$$

Deci, în relaţiile (6) şi (7) vom avea egalitate. Conform Propoziţiei 2, numerele x^2, x şi 1 sunt egale. În consecinţă, $x = 1$ este unica soluţie a inecuaţiei (6).

Aplicaţia 3. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}_+^*$ ecuaţia*

$$\frac{2009}{2010}(2009+x)+\frac{2010x}{2009x+1} = 2010\sqrt[2010]{x}. \tag{8}$$

Soluţie. Luând în (2) $n = 2010$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2009} = 1$ şi $x_{2010} = x$, avem

$$\frac{2009}{2010}(2009+x)+\frac{2010x}{2009x+1} \geq 2010\sqrt[2010]{x}.$$

Cum (8) cere egalitate în relaţia precedentă, rezultă că $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2010}$; deci, $x = 1$.

Recreaţii ... matematice

Diofant din Alexandria (sec. III d.Hr.)

Despre viaţa lui **Diofant** nu se cunoaşte aproape nimic; nici data şi nici locul naşterii. Se consideră că a trăit, cel mai probabil, în jurul anului 250 d.Hr. Şi-a desfăşurat activitatea la *Alexandria* şi a scris un tratat în 13 volume, **Aritmetica**, care poate fi comparat ca importanţă cu **Elementele** lui **Euclid** (tot în 13 volume). Numai *şase* dintre aceste volume nu au fost pierdute şi au devenit sursă de inspiraţie pentru matematicienii Renaşterii. Pe marginea cărţii a II-a a lui Diofant, matematicianul francez **Pierre Fermat** a notat celebra sa teoremă, *Marea Teoremă a lui Fermat.*

Durata vieţii lui Diofant se poate afla rezolvând o problemă a sa, care a fost, se pare, gravată pe piatra lui funerară.

Dumnezeu i-a îngăduit să fie copil o şesime din viaţa sa şi, adăugând la aceasta a douăsprezecea parte, i-a acoperit obrazul cu puf gingaş, i-a împărtăşit lumina sfântă a căsniciei după a şaptea parte a vieţii, iar după cinci ani de căsătorie i-a oferit un fiu. Dar vai! nefericit copilul născut târziu; după ce a atins o jumătate din întreaga viaţă a tatălui, copilul a fost răpit de soarta necruţătoare. După ce şi-a alinat suferinţa, adâncindu-se în ştiinţa numerelor vreme de patru ani, şi-a dat sufletul.

Întrebare. *Câţi ani a trăit Diofant?*

N.B. Răspunsul se găseşte la pagina 24.