ARTICOLE ŞI NOTE

Rigla şi compasul

Gabriel POPA[1]

Abstract. The two instruments accepted by the ancient Greeks for performing geometric constructions, if separately used, are not equally powerful. The compasses alone can accomplish all the constructions able to be performed by means of the rule and the compasses together (*Mohr - Mascheroni*), while the rule alone cannot do it (*Hilbert*). These results are presented in this Note, with some clearing up brought to the proof of reference [**1**].

Keywords: circle, cone, rule, compasses.

MSC 2000: 51M15.

1. În problemele de construcţii geometrice este permisă, în general, utilizarea a două instrumente: *rigla* şi *compasul*. Aceste instrumente sunt considerate ca fiind ideale; ele trasează dreptele şi cercurile exact, grosimea liniei de creion şi orice alte aproximări nefiind luate în considerare.

Rigla este presupusă ca fiind infinită, fără gradaţii pe ea. Ea poate fi folosită pentru a trasa dreapta ce trece prin două puncte date (în sensul determinării oricărui punct al acesteia). Nu o putem utiliza pentru a măsura distanţe între puncte.

Date O, P două puncte în plan, compasul poate fi utilizat pentru a trasa cercul de centru O şi care trece prin P (în sensul determinării oricărui punct al acestuia). Compasul este considerat ca fiind nerigid: odată ce l-am ridicat de pe hârtie, el se închide, altfel spus nu putem "transporta" distanţa cuprinsă între vârfurile sale.

În orice problemă de construcţii geometrice, se porneşte de la o mulţime dată S de puncte ale planului. Putem obţine puncte noi cu ajutorul riglei şi compasului aşa cum am văzut anterior, precum şi prin următoarele trei operaţii, numite *fundamentale*:

- *determinarea punctului de intersecţie a două drepte;*
- *determinarea punctelor de intersecţie a unei drepte cu un cerc;*
- *determinarea punctelor de intersecţie a două cercuri.*

Definiţie. Spunem că o problemă de construcţie este *rezolvabilă cu rigla şi compasul* dacă o putem reduce la o succesiune finită de operaţii alese dintre cele trei operaţii fundamentale.

Scopul acestui demers este prezentarea posibilităţilor de folosire a acestor două instrumente. Rezultatele principale sunt date de teoremele **2**, **4** şi **5** de mai jos.

2. Ne propunem mai întâi să arătăm că putem înlocui compasul nerigid cu un compas rigid (care, în plus faţă de cel nerigid, poate "transporta" lungimea unui segment, deci nu se închide automat după utilizare). Este adevarată următoarea

Teoremă. *Toate construcţiile care pot fi realizate cu rigla şi compasul rigid pot fi realizate cu rigla şi compasul, în sensul precizat la* **1**.

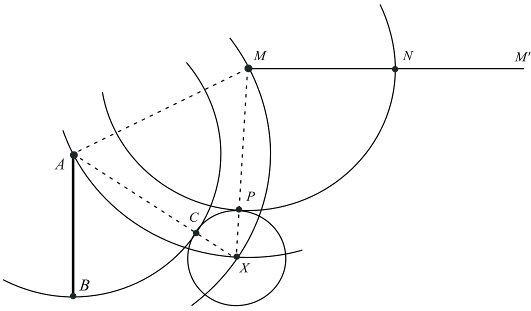
Demonstraţie. Este suficient să dăm un procedeu de construcţie a unui segment congruent cu un segment dat şi având un capăt fixat, folosind doar rigla şi compasul nerigid (altfel spus, să arătăm cum se poate transporta un segment). Pentru aceasta,

[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

fie $[AB]$ un segment dat şi $[MM'$ o semidreaptă dată; dorim să găsim unicul punct $N \in [MM'$ pentru care $[MN] \equiv [AB]$.

Cercurile de centre A şi M şi care trec prin M, respectiv prin A, se intersectează în două puncte; fie X unul dintre ele. Avem că $\triangle AXM$ este echilateral. Trasăm cercul de centru A care trece prin B; acesta intersectează semidreapta $[AX$ într-un punct C. Deosebim două situaţii:

a) C este între A şi X. Fie cercul de centru X care trece prin C şi fie P punctul de intersecţie dintre acesta şi segmentul $[XM]$. Există un asemenea punct, întrucât $XP = XC = XA - AC < XA = XM$. Desenăm cercul de centru M şi care trece prin P; acesta intersectează semidreapta $[MM'$ într-un punct N şi avem că $MN = MP = MX - PX = AX - CX = AC = AB$, deci N este punctul căutat.



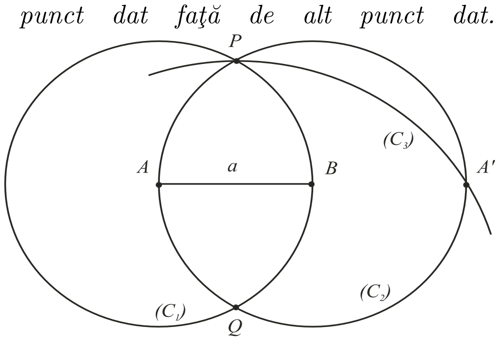
b) X este între A şi C. Construcţia curge la fel, însă punctul P nu se va mai afla pe segmentul $[MX]$, ci pe semidreapta opusă lui $[XM$.

Observaţie. În cele ce urmează, vom folosi exprimări de genul: "fie cercul de centru O şi rază AB", unde atât A cât şi B sunt diferite de O; aceste construcţii sunt permise de teorema precedentă.

3. Dorim să arătăm în continuare că un compas rigid poate realiza singur toate construcţiile posibil a fi efectuate cu rigla şi compasul. Calea urmată este, în linii mari, cea prezentată în [**1**], unele afirmaţii directe de acolo fiind justificate mai riguros. Demonstraţia clasică, folosind inversiunea, poate fi găsită, spre exemplu, în [**2**], pp.26-29.

Începem prin a indica algoritmi pentru trei construcţii importante.

(i) *Construcţia simetricului unui punct dat faţă de alt punct dat.* Presupunem date două puncte A şi B şi fie $a = d(A, B)$. Desenăm cercul (C_1) de centru A şi care trece prin B, apoi cercul (C_2) de centru B şi care trece prin A. Razele celor două cercuri sunt ambele a, iar distanţa centrelor este, de asemenea, a. Deoarece $a < a+a$, conform teoremei celor două cercuri, rezultă că (C_1) şi (C_2) au în comun două puncte P şi Q, aflate de o parte şi de alta a dreptei AB. În



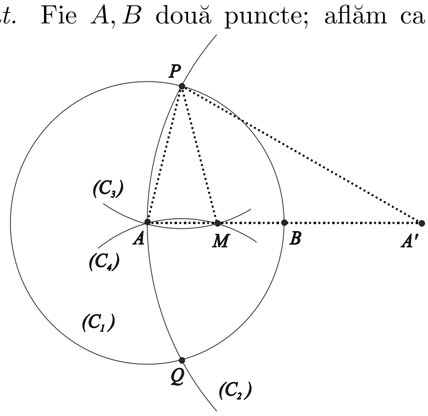
plus, cum $\triangle PAB$ şi $\triangle QAB$ sunt echilaterale, avem că $m(\widehat{AP}) = m(\widehat{AQ}) = 60°$ (arcele sunt gândite în cercul (C_2)).

Construim acum cercul (C_3) de centru Q, care trece prin P. Cum raza lui (C_3) este $PQ < 2AB$, urmează că (C_3) şi (C_2) au în comun două puncte; fie A' al doilea dintre ele. Deoarece în cercul (C_2) coardele $[PQ]$ şi $[QA']$ sunt congruente, avem că şi arcele $\widehat{QP}$ şi $\widehat{QA'}$ sunt egale. Atunci:

$$m(\widehat{AQA'}) = m(\widehat{AQ}) + m(\widehat{QA'}) = m(\widehat{AQ}) + m(\widehat{PQ}) = 60° + 120° = 180°,$$

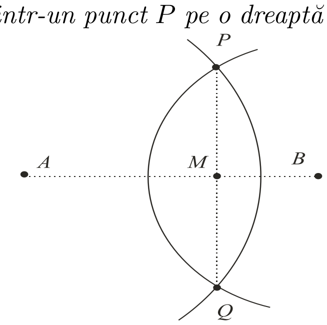
deci punctele A şi A' sunt diametral opuse în cercul (C_2), altfel spus A' este simetricul lui A faţă de B pe care îl căutam.

(ii) *Construcţia mijlocului unui segment dat.* Fie A, B două puncte; aflăm ca mai sus simetricul A' al lui A faţă de B. Trasăm cercurile (C_1) şi (C_2), de centre A, respectiv A' şi care trec prin B, respectiv A. Dacă $a = AB$, razele celor două cercuri sunt a şi $2a$, iar distanţa centrelor este $2a$. Sunt verificate ipotezele teoremei celor două cercuri şi fie atunci $\{P, Q\} = (C_1) \cap (C_2)$. Trasăm acum cercurile (C_3) şi (C_4), de centre P, respectiv Q şi care trec prin A. Deoarece distanţa centrelor este $PQ < 2AB$, urmează că (C_3) şi (C_4) au în comun două puncte; fie M al doilea dintre ele. Vom arăta că M este mijlocul căutat al segmentului $[AB]$.



Se observă uşor că patrulaterul $PAQM$ este romb, deci $PQ \perp AM$. Pe de altă parte, A este mijlocul arcului $\widehat{PQ}$ în cercul (C_2), deci $PQ \perp AA'$. De aici, punctele A, M, A' şi B sunt toate coliniare. Triunghiurile $A'AP$ şi PAM sunt isoscele: $A'A = A'P = 2a$ ca raze în (C_2), $PA = PM = a$ ca raze în (C_3) şi au un unghi, $\angle PAM$, comun. Urmează că ele sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $2 : 1$. Atunci $PA = 2AM$, deci $AM = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}a$.

(iii) *Construcţia piciorului perpendicularei coborâtă dintr-un punct P pe o dreaptă AB.* Fie A, B două puncte în plan, iar P un punct necoliniar cu ele. Trasăm cercurile (C_1) şi (C_2), de centre A, respectiv B şi care trec prin P. Fie Q al doilea punct de intersecţie al acestor cercuri; este clar că Q este simetricul lui P faţă de dreapta AB. Atunci mijlocul M al segmentului $[PQ]$, care poate fi determinat ca în construcţia precedentă, este piciorul perpendicularei din P pe $[AB]$.

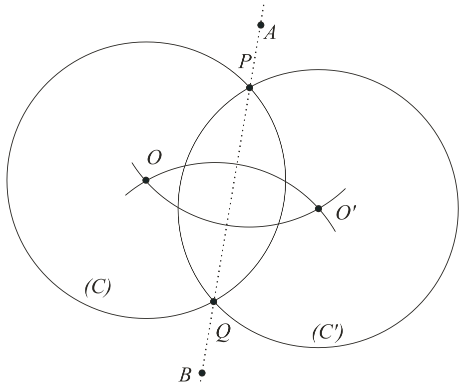


4. Teoremă (Mohr–Mascheroni). *Orice construcţie geometrică realizabilă cu rigla şi compasul se poate efectua folosind doar compasul rigid.*

Demonstraţie. Vom considera că o dreaptă este determinată prin două puncte ale sale; pentru a afla un alt punct al dreptei, trebuie să indicăm un procedeu de construcţie a lui folosind compasul. Pentru a demonstra teorema, trebuie să arătăm cum pot fi realizate cele trei operaţii fundamentale. Evident, putem limita discuţia la primele două operaţii.

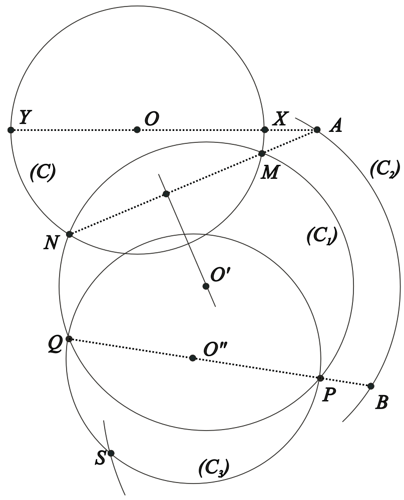
(i) *Aflarea punctelor de intersecţie dintre un cerc şi o dreaptă.* Presupunem că aceste puncte există şi dorim să le determinăm ca intersecţii de cercuri. În cazul în care, pe parcursul construcţiei, vom avea cercuri fără puncte comune, înseamnă că dreapta considerată este exterioară cercului iniţial. Deosebim două situaţii:

a) *Dreapta nu trece prin centrul cercului.* Fie (C) un cerc dat de centru O, iar A, B două puncte astfel încât $O \notin AB$. Aflăm simetricul O' al punctului O faţă de dreapta AB, ca în construcţia precedentă. Trasăm apoi cercul (C'), de centru O' şi având aceeaşi rază ca şi cercul (C). Cum AB este axă de simetrie a figurii obţinute, urmează că $AB \cap (C) = (C) \cap (C')$, de unde construcţia punctelor de intersecţie dintre AB şi (C).



b) *Dreapta conţine centrul cercului.* Fie (C) un cerc dat de centru O şi rază R, iar A un punct în plan. Dorim să determinăm punctele comune pentru (C) şi OA. Fie $M \in (C)$ oarecare. Conform a), putem determina N – al doilea punct de intersecţie a lui (C) cu AM. Cu vârful compasului în M, apoi în N şi păstrând aceeaşi deschidere, determinăm un punct O' pe mediatoarea segmentului $[MN]$ şi construim un cerc (C_1) de centru O', care să aibă raza mai mare decât R.

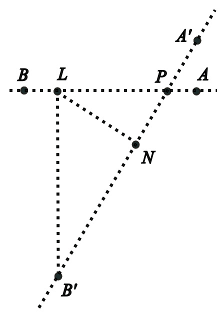
Fie $[PQ]$ o coardă a lui (C_1) de lungime $2R$, posibil de determinat conform **3.**(i). Aflăm B – punct de intersecţie al dreptei PQ cu cercul (C_2) de centru O' şi care trece prin A, folosind a). Ca la **3.**(ii), fie O'' mijlocul segmentului $[PQ]$, iar (C_3) cercul de centru O'' care trece prin P. Intersectăm acest cerc cu cercul de centru B şi rază AN; fie S unul dintre punctele de intersecţie. Determinăm acum X, Y pe (C), prin intersecţii de cercuri, astfel încât $[NX] \equiv [SP], [NY] \equiv [SQ]$. Vom arăta că X, Y sunt punctele căutate.

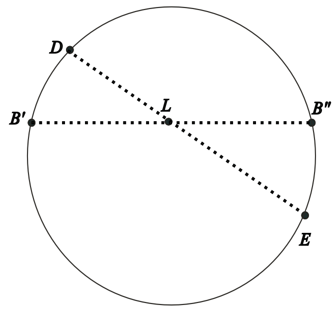


Deoarece cercurile (C) şi (C_3) sunt congruente iar $[NX] \equiv [SP], [NY] \equiv [SQ]$, urmează că $\triangle NXY \equiv \triangle SPQ$, de unde $[XY] \equiv [PQ]$. Însă $[PQ]$ este diametru în (C_3), deci $[XY]$ va fi diametru în (C), adică X, O, Y vor fi coliniare. Rămâne să demonstrăm că $A \in XY$.

Punctele A şi B sunt situate pe cercul (C_2), concentric cu (C_1) şi atunci ele vor avea aceeaşi putere faţă de (C_1), adică $AM \cdot AN = BP \cdot BQ$. Dacă $\{T\} = BS \cap (C_3)$, obţinem că $BP \cdot BQ = BT \cdot BS$, de unde $AM \cdot AN = BT \cdot BS$. Cum $[AN] \equiv [BS]$, rezultă că $[AM] \equiv [BT]$, deci $[MN] \equiv [TS]$. Însă $[MN]$ şi $[TS]$ sunt coarde în cercuri egale, deci $\widehat{MN} = \widehat{ST}$ şi apoi $\widehat{XM} = \widehat{TP}$, adică $\angle XNM \equiv \angle PST$. Urmează că $\triangle XNA \equiv \triangle PSB$ şi de aici $\angle AXN \equiv \angle BPS$. Pe de altă parte, $\angle NXY \equiv \angle SPQ$, deci $m(\angle AXN) + m(\angle NXY) = m(\angle BPS) + m(\angle SPQ) = 180°$, i.e. $A \in XY$, adică ceea ce doream să dovedim.

(ii) *Aflarea punctului de intersecţie a două drepte.* Fie AB şi $A'B'$ două drepte, în sensul că avem date perechile de puncte (A, B) şi (A', B'). Folosind **3.**(iii), construim piciorul L al perpendicularei din B' pe AB, apoi piciorul N al perpendicularei din L pe $A'B'$. Dacă $N = B'$, atunci $AB \cap A'B' \neq \emptyset$. Dacă nu putem determina N, atunci AB şi $A'B'$ sunt drepte perpendiculare, concurente în L.





Presupunem determinate $L \neq N$ şi fie P punctul comun celor două drepte. P este bine determinat de lungimea l a segmentului $B'P$, întrucât odată cunoscută aceasta, intersectăm cercul de centru B' şi rază l cu drepta $A'B'$. Aplicând teorema catetei în $\triangle LB'P$, obţinem că

$$B'L^2 = B'N \cdot B'P = B'N \cdot l. \tag{1}$$

Determinăm simetricul B'' al lui B' faţă de L şi construim un cerc având centrul pe mediatoarea segmentului $[B'B'']$, de rază suficient de mare. Prin intersecţii de cercuri, fixăm D pe acest cerc astfel încât $[DL] \equiv [B'N]$, apoi fie E punctul în care DL taie cercul. Din puterea punctului L,

$$B'L^2 = B'L \cdot LB'' = LD \cdot LE = B'N \cdot LE. \tag{2}$$

Comparând (1) şi (2), rezultă că $LE = l$, ceea ce încheie demonstraţia.

5. În final, vom arăta că rigla este un instrument mai puţin puternic decât compasul, în sensul că rigla singură nu poate realiza toate construcţiile geometrice posibil a fi efectuate cu rigla şi compasul, în timp ce compasul singur poate realiza toate aceste construcţii. Avem nevoie de următorul rezultat, a cărui demonstraţie poate fi găsită, de exemplu, în [**5**], pp. 235-238:

Lemă. *Fie un con oblic de vârf V, având drept bază în planul (P) cercul (C). Fie $[AB]$ diametrul bazei pentru care $(VAB) \perp (P)$, iar (P') un plan perpendicular pe (VAB), care îl intersectează după dreapta $(A'B')$, cu $A' \in VA$, $B' \in VB$. Dacă $\angle VA'B' \equiv \angle VBA$, atunci (P') intersectează conul după un cerc.*

Putem atunci demonstra următoarea

Teoremă (Hilbert). *Nu orice construcţie geometrică realizabilă cu rigla şi compasul poate fi efectuată folosind numai rigla.*

Demonstraţie. Dat un cerc în plan, putem să-i aflăm centrul folosind rigla şi compasul (trasăm mediatoarele a două laturi ale unui triunghi înscris în cerc şi considerăm intersecţia acestora); vom arăta că această construcţie nu poate fi realizată numai cu rigla. Să presupunem prin absurd că există un anumit mod de a găsi centrul unui cerc folosind numai rigla. O transformare geometrică prin care cercul dat este dus într-un cerc, iar orice dreaptă este transportată într-o dreaptă, ar face ca în figura transformată a construcţiei presupuse, imaginile dreptelor care iniţial se intersectau în centrul cercului dat, să se intersecteze în centrul cercului nou obţinut. Vom arăta însă ca o anumită proiecţie conică duce dreptele în drepte, cercul dat într-un cerc, însă nu face să se corespundă şi centrele celor două cercuri; obţinem astfel o contradicţie care va încheia demonstraţia.

Fie (C) un cerc de centru O în planul (P), iar V un punct astfel încât VO să nu fie perpendiculară pe (P). Fie (P') un plan ca în ipoteza lemei şi considerăm proiecţia conică a planului (P) pe planul (P'). Este suficient să mai arătăm că proiecţia lui O nu este mijlocul O' al segmentului $[A'B']$. Să presupunem că $VA > VB$; dacă VU este bisectoarea unghiului $\widehat{AVB}$, rezultă că $AU > UB$, deoarece bisectoarea determină pe latura pe care cade segmente proporţionale cu laturile unghiului din care pleacă. Pe de altă parte, din $VA > VB$ rezultă că $m(\angle VBA) > m(\angle VAB)$, deci $m(\angle VA'B') > m(VB'A')$, de unde $VB' > VA'$. Cum VU' este bisectoare în $\triangle VA'B'$, unde $\{U'\} = VU \cap A'B'$, deducem că $U'B' > U'A'$. În concluzie, punctele O şi O', mijloacele segmentelor $[AB]$ şi respectiv $[A'B']$, sunt separate de dreapta VU şi deci ele nu pot coincide.

Notăm, în încheiere, că dacă pe foaia pe care se realizează construcţia este desenat un cerc oarecare, împreună cu centrul său, atunci putem efectua numai cu rigla (şi folosindu-ne de cercul dat) toate construcţiile realizabile cu rigla şi compasul (teorema **Poncelet-Steiner**, demonstrată, de exemplu, în [**3**], pp. 98-99).

Bibliografie

1. **N. Hungerbühler** - *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, A.M.M. 101 (1994), pp.784-787.
2. **H. Lebesgue** - *Leçons sur les constructiones géométriques*, Gauthier-Villars, 1950.
3. **G.E. Martin** - *Geometric constructions*, Springer-Verlag, 1998.
4. **E. Moise** - *Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior*, E.D.P., 1980.
5. **M.H. Rademacher, O. Toeplitz** - *Despre numere şi figuri*, Ed. Ştiinţifică, 1968.

Vizitaţi pagina web a revistei:

http://www.recreatiimatematice.ro