Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G156. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$, demonstraţi că $\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \geq 6$.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

G157. Spunem că un număr natural are proprietatea (P) dacă se poate scrie ca sumă a trei pătrate perfecte nenule şi că are proprietatea (Q) dacă se poate scrie ca sumă a patru pătrate perfecte nenule.

a) Daţi exemple de numere naturale care au: numai proprietatea (P); numai proprietatea (Q); atât proprietatea (P) cât şi proprietatea (Q).

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ au suma pară şi oricare dintre ele este diferit de suma celorlaltor două, demonstraţi că numărul $a^2 + b^2 + c^2$ are proprietatea (Q).

Ovidiu Pop, Satu Mare

G158. Se consideră ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

b) Dacă (x, y, z) este soluţie a ecuaţiei, demonstraţi că fiecare dintre numerele xy, yz, zx şi $xy + yz + zx$ este pătrat perfect.

Liviu Smarandache, Craiova

G159. Aflaţi ultimele două cifre ale numerelor $(70n + 6) \cdot 6^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ion Săcăleanu, Hârlău

G160. Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$, $B = \left\{ \frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} \,\middle|\, a, b, c, d \in A,\ a, b, c, d \text{ distincte} \right\}$ şi $C = \left\{ \frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d} \,\middle|\, a, b, c, d \in A,\ a, b, c, d \text{ distincte} \right\}$. Determinaţi $A \cap B \cap C$. (*În legătură cu E: 13650 din G.M. 5-6/2008.*)

Andrei Crăcană, elev, Iaşi

G161. Fie M mulţimea numerelor de forma $\overline{abc}$, cu $a \cdot b \cdot c \neq 0$. Determinaţi cardinalul maxim al unei submulţimi N a lui M astfel încât $x + y \neq 1109$, $\forall x, y \in N$.

Petru Asaftei şi Gabriel Popa, Iaşi

G162. Putem înlocui un triplet de numere întregi (a, b, c) cu unul dintre tripletele $(2b + 2c - a, b, c)$, $(a, 2a + 2c - b, c)$ sau $(a, b, 2a + 2b - c)$. Arătaţi că dacă pornim de la tripletul $(31329, 24025, 110224)$ şi efectuăm succesiv asemenea înlocuiri, se obţin mereu triplete formate numai din pătrate perfecte.

Marian Tetiva, Bârlad

G163. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) \neq 90°$ şi punctele $B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (AB)$. Arătaţi că axa radicală a cercurilor de diametre $[BB_1]$ şi $[CC_1]$ trece prin punctul A dacă şi numai dacă $B_1C_1 \| BC$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G164. Fie B, b numere reale date, cu $B > b > 0$. Dintre toate trapezele circumscriptibile care au lungimile bazelor B şi b, determinaţi-l pe cel de arie maximă.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

G165. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), M mijlocul laturii $[BC]$, iar P un punct în interiorul triunghiului ABM. Notăm $\{D\} = BP \cap AC$, $\{E\} = CP \cap AB$. Demonstraţi că $BE < CD$ şi $PE < PD$.

Cristian Pravăţ, Iaşi şi Titu Zvonaru, Comăneşti

B. Nivel liceal

L156. Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R. Notăm cu T_1, T_2 punctele de contact cu cercul ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de intersecţie a dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$, astfel încât $A \notin [OM]$. Determinaţi punctele M cu proprietatea că se poate construi un triunghi cu segmentele $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1], [MT_2]$ şi $[MA]$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L157. În planul $\triangle ABC$ definim transformarea $P \to P'$ astfel: 1. punctul P se proiectează pe dreptele BC, CA, AB în D, E şi respectiv F; 2. simetricele punctelor D, E, F în raport cu mijloacelor laturilor $[BC], [CA]$ şi respectiv $[AB]$ se notează D', E', F'; 3. P' este punctul de concurenţă a perpendicularelor în D', E', F' pe BC, CA şi respectiv AB. Arătaţi că transformarea $P \to P'$ coincide cu simetria în raport cu O, centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L158. În interiorul triunghiului ABC cu latura $[BC]$ fixă şi vârful A mobil, considerăm punctul T asfel încât $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA}$. Determinaţi poziţia punctului A în planul triunghiului pentru care $m(\widehat{BAC}) = \alpha < \dfrac{5\pi}{6}$, iar suma distanţelor de la T la vârfurile triunghiului este maximă.

Cătălin Calistru, Iaşi

L159. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, demonstraţi inegalitatea

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) > 6 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

L160. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$m_a + m_b + m_c \geq 6r\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right) \geq 9r.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L161. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $a + b + c = 1$, demonstraţi inegalitatea

$$3 + \sum \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{1+a} \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)\left(\sum \frac{1}{1+a}\right).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L162. Dacă $n \in \mathbb{Z}^*$ este fixat, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

L163. Fie a un număr întreg impar, iar $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că polinomul $X^{2^n} + a^{2^n}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$ însă, pentru orice număr prim p, polinomul redus modulo p este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

Dorel Miheţ, Timişoara

L164. O secvenţă $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $2n$ numere reale are proprietatea (P) dacă $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice secvenţă cu proprietatea (P), există $1 \le i < j \le n$ cu $x_i x_j + y_i y_j \ge 0,947$. Determinaţi cea mai bună constantă α aşa încât $x_i x_j + y_i y_j \ge \alpha$, pentru orice secvenţă cu proprietatea (P).

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

L165. Fie $n \ge 2$ un număr natural. Determinaţi cel mai mare număr natural m pentru care există submulţimile nevide şi distincte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ale lui $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, cu proprietatea că fiecare element al lui A este conţinut în cel mult k dintre ele, unde:

a) $k = 2$; b) $k = n$; c) $k = n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G156. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le 3$, prove that

$$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \ge 6.$$

I.V. Maftei, Bucureşti and Mihai Haivas, Iaşi

G157. We say that a natural number has the property (P) if it can be written as the sum of three nonzero perfect squares, and it has the property (Q) if it can be written as the sum of four nonzero perfect squares.

a) Give examples of natural numbers that have: property (P) only; property (Q) only; both property (P) and property (Q).

b) If the numbers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ have an even sum and each of them differs from the sum of the other two numbers, show that $a^2 + b^2 + c^2$ has the property (Q).

Ovidiu Pop, Satu Mare

G158. The equation $x^2 + y^2 + z^2 = (x-y)^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2$ with $x, y, z \in \mathbb{N}$ is considered.

a) Show that this equation has infinitely many solutions.

b) If (x, y, z) is a solution to the equation, show that each of the numbers $x\,y$, $y\,z$, $z\,x$ and $x\,y + y\,z + z\,x$ is a perfect square.

Liviu Smarandache, Craiova

G159. Find the last two digits of the number $(70n+6)\cdot 6^{n-1}$.

Ion Săcăleanu, Hârlău

G160. Three sets are considered, namely: $A=\{1,2,3,\ldots,2009\}$; $B=\left\{\dfrac{a}{a+d}+\dfrac{b}{b+d}+\dfrac{c}{c+d}\middle| a,b,c,d\in A \text{ and mutually distinct}\right\}$; $C=\left\{\dfrac{d}{a+d}+\dfrac{d}{b+d}+\dfrac{d}{c+d}\middle| a, b,c,d\in A \text{ and mutually distinct}\right\}$. Determine $A\cap B\cap C$. (*The problem is connected with E: 13650 of Gazeta Matematică 5-6/2008*).

Andrei Crăcană, highschool student, Iaşi

G161. Let M be the set of numbers of the form $\overline{abc}$ with $a\cdot b\cdot c\neq 0$. Determine the maximal cardinal number of a subset N of M such that $x+y\neq 1109$, $\forall x,\, y\in N$.

Petru Asaftei and Gabriel Popa, Iaşi

G162. We may replace the triple of integer numbers (a,b,c) by one of the triples $(2b+2c-a,b,c)$, $(a,2a+2c-b,c)$, $(a,b,2a+2b-c)$. Show that if we start from the triple $(31329,24025,110224)$ and successively aply such replacings only triples consisting of perfect squares are obtained.

Marian Tetiva, Bârlad

G163. Let ABC be a triangle with $m(A)\neq 90^0$ and take the points $B_1\in(AC)$ and $C_1\in(AB)$. Prove that the radical axis of the circles of diameters $[BB_1]$ and $[CC_1]$ passes through the point A if and only if $B_1C_1\parallel BC$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G164. Let B,b be given real numbers with $B>b>0$. Among all the circumscriptible trapesiums with the lengths of their bases (respectively) equal to B and b select the one of maximum area.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

G165. Let ABC be an isosceles triangle $(AB=AC)$, M the mid-point of the side $[BC]$, and P a point in the interior of triangle ABM. We denote $\{D\}=BP\cap AC$, $\{E\}=CP\cap AB$. Prove that $BE<CD$ and $PE<PD$.

Cristian Pravăţ, Iaşi and Titu Zvoranu, Comăneşti

B. Highschool level

L156. Let M be a point that is exterior to the circle $\mathcal{C}$ of center O and radius R. We denote by T_1,T_2 the contact points, with this circle, of the tangents from M to $\mathcal{C}$, and let A be the intersection point of the straight line OM with circle $\mathcal{C}$ such that $A\notin[OM]$. Determine the points M with the property that a triangle can be built with the line segments $[MT_1]$, $[MT_2]$ and $[MO]$ as its sides, while a triangle with $[MT_1]$, $[MT_2]$ and $[MA]$ as its sides cannot be built.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L157. In the plane of $\triangle ABC$, we define the transformation $P\to P'$ as follows: 1^0 the point P is projected onto the lines BC, CA, AB at the points D, E and respectively F; 2^0 the symmetric points of D, E, F with respect to the mid-points of the sides $[BC]$, $[CA]$, and respectively $[AB]$ are denoted as D', E', F'; 3^0 P' is the common (or meeting) point of the perpendicular lines at D', E', F' on BC, CA and respectively AB. Show that the transformation $P \to P'$ coincides with the symmetry with respect to O − the center of the circumscribed circle to $\triangle ABC$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L158. We consider the point T in the interior of triangle ABC with its side $[BC]$ fixed and its vertex A mobile such that $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA}$. Determine the position of the point A in the plane of the triangle such that $m(\widehat{BAC}) = \alpha < \frac{5\pi}{6}$, and the sum of the distances from T to the vertices of the triangle is maximum.

Cătălin Calistru, Iaşi

L159. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ and $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prove the inequality

$$a\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 + b\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + c\left(\frac{\sin x}{x}\right) + 3\sqrt[3]{abc}\left(\frac{\tan x}{x}\right) \geq 6 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

L160. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$m_a + m_b + m_c \geq 6\,r\left(\frac{m_a}{m_b + m_c} + \frac{m_b}{m_a + m_c} + \frac{m_c}{m_a + m_b}\right) \geq 9\,r.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L161. If $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ and $a + b + c = 1$, prove the inequality

$$3 + \sum \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{1+a} \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)\left(\sum \frac{1}{1+a}\right).$$

Titu Zvoranu, Comăneşti

L162. If $n \in \mathbb{Z}^*$ is fixed, solve in $\mathbb{R}$ the equation $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dumitru Mihalache and Gabi Ghidoveanu, Bârlad

L163. Let a be an odd number and let n be a nonzero number. Prove that the polynomial $X^{2^n} + a^{2^n}$ is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$, while it factors modulo f for all prime p.

Dorel Miheţ, Timişoara

L164. A sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ of $2\,n$ real numbers is said to have the property (P) if $x_i^2 + y_i^2 = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$. Let $n \in \mathbb{N}^*$ such that for any sequence with property (P) there are subscripts i, j with $1 \leq i < j \leq n$ such that $x_i\, x_j + y_i\, y_j \geq 0.947$. Determine the best constant α such that $x_i\, x_j + y_i\, y_j \geq \alpha$, for any sequence with property (P).

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

L165. Let $n \geq 2$ be a natural number. Determine the largest natural number m such that m nonempty and distinct subsets $A_1, A_2, \ldots, A_m$ of $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ exist with the property that each element of A belongs to at most k such subsets, where:

a) $k = 2$; *b*) $k = n$; *c*) $k = n + 1$.

Marian Tetiva, Bârlad