O problemă de colecţie

Marian TETIVA[1]

Priviţi cu atenţie mulţimile $\{0,2,4,8\}$ şi $\{-1,3,5,7\}$. Ce observaţi? Probabil că, la prima vedere, nu mare lucru (se vede doar că sunt două mulţimi de numere întregi cu acelaşi număr de elemente). Dar ele au o proprietate specială: toate sumele de câte două elemente dintr-una din aceste mulţimi coincid cu sumele de câte două elemente din cealaltă. (E vorba de sumele $0+2$, $0+4$, $0+8$, $2+4$, $2+8$, $4+8$ care sunt egale, într-o anumită ordine, cu $-1+3$, $-1+5$, $-1+7$, $3+5$, $3+7$, $5+7$.) Cu puţină răbdare puteţi constata că şi mulţimile, să zicem, $\{0,2,4,8,10,14,16,18\}$ şi $\{-1,3,5,7,11,13,15,19\}$ au aceeaşi proprietate (dar trebuie calculate mult mai multe sume). Se vede că mulţimile din primul exemplu au câte patru elemente, cele din cel de-al doilea - câte opt. Oare ce număr de elemente ar putea să aibă două mulţimi cu această proprietate? Răspunsul la această întrebare a fost dat, el spune că nu veţi găsi asemenea mulţimi nici cu trei, nici cu zece, nici cu o sută cincisprezece elemente, ci doar cu un număr de elemente care este putere a lui doi. Mai precis, are loc

Teorema 1 (Erdős-Selfridge). *Fie $\{a_1,\ldots,a_n\}$ şi $\{b_1,\ldots,b_n\}$ două colecţii distincte de numere reale astfel încât*

$$\{a_i+a_j:\ 1\le i<j\le n\}=\{b_i+b_j:\ 1\le i<j\le n\}.$$

Atunci n este o putere a lui 2. Mai mult, pentru orice n putere a lui 2, se pot construi exemple de asemenea colecţii (fiecare având n elemente).

Să remarcăm că este vorba de mulţimi într-un sens mai larg decât cel obişnuit, anume, de "mulţimi" în care elementele se pot repeta - le-am numit (ca în [**3**]) *colecţii* (se foloseşte termenul *multisets* în limba engleză). Tot astfel se consideră şi colecţiile (iar nu mulţimile) sumelor de câte două elemente formate de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ şi $\{b_1,\ldots,b_n\}$. Astfel, se poate verifica uşor că, de pildă, colecţiile $\{0,2,2,2\}$ şi $\{1,1,1,3\}$ produc aceeaşi colecţie de sume, anume $\{2,2,2,4,4,4\}$.

Puteţi găsi în [**3**, problema 4.26] acest rezultat, demonstraţia lui clasică (foarte cunoscută; o reluăm şi noi imediat) şi referirea la una din primele apariţii ale sale în literatură. Schiţăm pe scurt această soluţie, căci tot de la ea vom porni şi noi. Ideea principală este de a considera două funcţii

$$f(x)=x^{a_1}+\cdots+x^{a_n}\ \text{ şi }\ g(x)=x^{b_1}+\cdots+x^{b_n}$$

şi de a observa că ipoteza teoremei se transcrie în egalitatea

$$(f(x))^2-f(x^2)=(g(x))^2-g(x^2)\Leftrightarrow(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=f(x^2)-g(x^2).$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Apoi se scrie $f(x) - g(x) = (x-1)^k h(x)$, cu $h(1) \neq 0$ (adică se pune în evidenţă cea mai mare putere a lui $x - 1$ care divide diferenţa $f(x) - g(x)$), deci obţinem $f(x^2) - g(x^2) = (x-1)^k (x+1)^k h(x^2)$ şi apoi egalitatea decisivă

$$h(x)(f(x) + g(x)) = (x+1)^k h(x^2);$$

într-adevăr, pentru $x = 1$, aceasta ne furnizează concluzia: $2n = 2^k \Leftrightarrow n = 2^{k-1}$.

Exerciţiul 1. Demonstraţi partea a doua a teoremei, adică arătaţi cum, pentru n putere a lui 2, se pot construi două colecţii de câte n numere reale (fiecare) care produc colecţii egale de sume de câte două elemente.

Această demonstraţie are neajunsul că se aplică (în exact aceşti termeni) doar dacă numerele a_i şi b_i sunt întregi, pentru ca f şi g să fie polinoame în adevăratul înţeles al cuvântului (chiar şi atunci trebuie observat că proprietatea numerelor se păstrează dacă li se adună tuturor acelaşi număr, şi facem această operaţie, dacă e nevoie, pentru a le avea pe toate pozitive). Totuşi, câteva argumente simple din analiza matematică vor face demonstraţia acceptabilă chiar dacă avem de-a face cu numere reale oarecare (aşa cum arătăm mai jos). Ceea ce e foarte bine, căci, indiscutabil, avem în faţă o problemă foarte frumoasă cu o rezolvare pe măsură, care (ne-am gîndit noi) merită să fie reamintită din când în când şi (de ce nu?) să fie exploatată ceva mai mult. Asta intenţionăm să facem mai departe, anume să demonstrăm

Teorema 2. *Fie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ două colecţii distincte de numere reale astfel încât*

$$\{a_i + a_j : \ 1 \leq i < j \leq n\} = \{b_i + b_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Atunci n este o putere a lui 2 şi, dacă $n = 2^{k-1}$, avem

$$a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j,$$

pentru orice $0 \leq j \leq k-1$.

Demonstraţie. Folosim aceleaşi funcţii f şi g ca mai sus, despre care mai facem observaţia că sunt indefinit derivabile pe $(0, \infty)$. Deoarece $f(1) = g(1) (= n)$ se poate considera cel mai mic număr întreg pozitiv k astfel încât $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$ pentru orice $j = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$ (indicele superior pus în paranteze arată, ca de obicei, ordinul de derivare).

Exerciţiul 2. Fie u o funcţie de k ori derivabilă cu derivata de ordinul k continuă într-o vecinătate a unui punct x_0 astfel încât $u^{(j)}(x_0) = 0$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $u^{(k)}(x_0) \neq 0$. Arătaţi că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0.$$

(Aceasta este o aplicaţie simplă a regulii lui l'Hospital, pe care o găsiţi în orice manual de analiză - de exemplu [**2**]. Observaţi analogia cu funcţiile polinomiale: se poate scrie $u(x) = (x - x_0)^k v(x)$ şi, dacă vrem ca funcţia v să fie continuă şi în x_0, valoarea ei în acest punct rezultă nenulă).

Acum să scriem egalitatea $(f(x))^2 - f(x^2) = (g(x))^2 - g(x^2)$ în forma

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x-1)^k}(f(x) + g(x)) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{(x^2-1)^k}(x+1)^k$$

(desigur, pentru $x \neq 1$) şi să facem aici pe x să tindă la 1. Obţinem (folosind exerciţiul 2 pentru funcţiile $x \mapsto f(x) - g(x)$, respectiv $x \mapsto f(x^2) - g(x^2)$ şi, evident, $x_0 = 1$)

$$\frac{f^{(k)}(1) - g^{(k)}(1)}{k!}(f(1) + g(1)) = \frac{f^{(k)}(1) - g^{(k)}(1)}{k!}2^k$$

deci $2n = 2^k$, la fel ca şi în prima variantă de demonstraţie (cea mai cunoscută), graţie faptului că $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$. Ceea ce nu se spune de obicei când se face acea demonstraţie este că avem egalităţile $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1)\cdots(a_i - j + 1) = \sum_{i=1}^{n} b_i(b_i - 1)\cdots(b_i - j + 1)$$

pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Acum se poate încheia demonstraţia cu câteva calcule algebrice simple; mai e nevoie doar să justificăm afirmaţia din

Exerciţiul 3. Egalităţile $f^{(j)}(1) = g^{(j)}(1)$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$ sunt echivalente cu $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$ pentru $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Cititorul atent trebuie să aibă o nemulţumire: de unde ştim că, la un moment dat (asta însemnând pentru un anume k natural) avem $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$? De ce n-ar fi valorile derivatelor de acelaşi ordin ale funcţiilor f şi g în 1 egale oricare ar fi acest ordin? E clar că în această situaţie s-ar obţine $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$ pentru orice număr natural n (la fel ca mai sus), iar răspunsul la întrebare e dat de

Exerciţiul 4. Dacă pentru numerele reale $a_1, \ldots, a_n$ şi $b_1, \ldots, b_n$ avem

$$a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$$

pentru $j = 1, \ldots, n$, atunci colecţiile $\{a_1, \ldots, a_n\}$ şi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ coincid.

Ori, tocmai asta e ideea: dacă avem două colecţii *distincte* care produc aceeaşi colecţie de sume de câte două, atunci numărul elementelor din fiecare colecţie este o putere a lui 2 (nu am mai spus, dar e aproape evident: două colecţii cu cardinale diferite nu pot produce aceeaşi colecţie de sume; considerarea aceluiaşi n ca număr de a-uri şi de b-uri este obligatorie). Iată de ce nu putem obţine la nesfârşit egalităţi de forma $a_1^j + \cdots + a_n^j = b_1^j + \cdots + b_n^j$, deci la un moment dat trebuie să avem $f^{(k)}(1) \neq g^{(k)}(1)$.

Şi acum chiar că am terminat. Ar mai fi poate de menţionat că exerciţiul 4 este o consecinţă firească şi aproape imediată a *formulelor lui Newton*, care pot fi găsite în orice manual de algebră (v. [**1**]).

Bibliografie

1. **A. Kostrikin** - *Introduction à l'algèbre*, Éditions Mir, Moscou, 1981.
2. **G. E. Şilov** - *Analiză matematică. Funcţii de o variabilă*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
3. **Ioan Tomescu** - *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.