Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.164. Scrie vecinii vecinului comun al numerelor 16 şi 18.
(*Clasa I*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

P.165. După ce dau celor doi fraţi mai mari câte două banane, mănânc şi eu trei banane. În coş îmi rămâne un număr de banane ce poate fi scris cu două cifre diferite şi care este cel mai mic număr de acest fel. Câte banane am avut în coş?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.166. Din cei 8 căţeluşi albi sau negri, cel mult 3 sunt albi. Care este numărul maxim de căţeluşi negri? Dar cel minim?
(*Clasa a II-a*) **Ioana Bărăgan, elevă, Iaşi**

P.167. Într-o cameră se joacă un pisoi cu doi pisici, un căţeluş care ţine în gură o păpuşă şi un băieţel care stă călare pe un căluţ de lemn. Câte picioare participă la joc?
(*Clasa a II-a*) **Alexandru Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

P.168. Există numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 123$ şi $a : b = b : c = c : d = 1$?
(*Clasa a III-a*) **Amalia Cantemir, elevă, Iaşi**

P.169. Calculează diferenţa următoare, fără a efectua parantezele: $(2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999) =$
(*Clasa a III-a*) **Mădălina Bucşă, elevă, Iaşi**

P.170. Doi fraţi au cumpărat un teren în formă de pătrat pe care l-au împărţit în două dreptunghiuri egale. Fiecare doreşte să împrejmuiască propriul teren cu gard. Cât mai are de lucru fiecare, dacă primul a realizat 430 m, al doilea 470 m, iar perimetrul pătratului este de 1000 m?
(*Clasa a III-a*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

P.171. Dacă $a+b+c = 175$ şi $a+2c = 200$, calculaţi produsul $(2a+b+3c)\cdot(c-b)$.
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Marian Ciuperceanu, Craiova**

P.172. Câte numere $\overline{abc}$ au suma cifrelor 7 şi pot fi rotunjite cu numărul $\overline{ab0}$?
(*Clasa a IV-a*) **Maria Nastasiu, elevă, Iaşi**

P.173. Se formează şirul de numere: 34, 334, 344, 3334, 3444, ... Câte cifre de 3 are numărul de pe locul 2008?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.102. Un întreprinzător doreşte să cumpere un număr de frigidere de la un angrosist, pe care urmează să le transporte către firma sa cu ajutorul unui camion de mare tonaj, care consumă $10\,l$ de motorină la $100\,km$ ($1l$ de motorină costă 3 lei). Întreprinzătorul poate opta între doi furnizori: A vinde frigiderul cu 1000 lei/buc.,

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2009.

iar B vinde acelaşi produs cu 990 lei/buc., însă are depozitul mai departe decât A, la o distanţă pe şosea $AB = 150\,km$.

a) Dacă întreprinzătorul doreşte să cumpere 20 de frigidere, ce furnizor va alege?

b) La ce număr de frigidere, costurile de achiziţie nu depind de furnizor?

Marian Ciuperceanu, Craiova

V.103. Se consideră numerele naturale $m = \dfrac{3x+5}{2x+2}$, $a = \dfrac{2y+5}{3}$, $b = \dfrac{5z+2}{5}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că m nu poate fi divizor al lui a, dar poate fi divizor al lui b.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

V.104. Scrieţi numărul 2008 ca sumă de trei cuburi perfecte. (Găsiţi toate posibilităţile!)

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

V.105. Se consideră numărul $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2009}$.

a) Demonstraţi că a nu poate fi pătrat perfect.

b) Aflaţi restul împărţirii lui a la 400.

Damian Marinescu, Târgovişte

V.106. Să se determine numărul natural a şi cifra b, dacă $(a+3)\cdot\overline{200b} = a\cdot 2009$.

Enache Pătraşcu, Focşani

V.107. Dacă $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ este dat, determinaţi $x, y \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x(x+2y+1) = 2^n \cdot 135$.

Petru Asaftei, Iaşi

V.108. Pe tablă sunt scrise numerele $2, 0, 0, 9$. Putem şterge de pe tablă oricare două numere, scriind în loc succesorii acestora. Este posibil ca, în urma mai multor operaţii de acest fel, să obţinem patru numere egale?

Cătălin Budeanu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.102. O asociaţie de locatari este formată din trei familii care au consumat într-o lună $27m^3, 16m^3$, respectiv $4m^3$ de apă potabilă. Din consumul total, pentru $38m^3$ de apă trebuie plătită o taxă de canalizare, care se împarte proporţional cu consumul fiecărei familii. Dacă preţul apei este de 1,6 lei/m^3, taxa de canalizare este de 0,56 lei/m^3 şi fiecărei sume i se aplică T.V.A. de 19 %, aflaţi ce sumă trebuie să plătească fiecare familie (efectuaţi calculele cu două zecimale exacte).

Petru Asaftei, Iaşi

VI.103. Să se determine numărul prim p şi numerele întregi a şi x pentru care $(x-a)(x-1)(a-1) = p$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.104. Determinaţi numerele prime p şi q, ştiind că există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^2 + y^2 = p$, iar $x + y + 1 = q$.

Andrei Cozma, elev, Bucureşti

VI.105. Să se arate că numărul $N = 3^{3^{2009}} - 3^{3^{2008}}$ se poate scrie ca produs a trei numere naturale consecutive.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

VI.106. Se consideră unghiul $\widehat{xOy}$ şi punctele $A, B \in (Ox, C, D \in (Oy$ astfel încât $A \in (OB)$, iar $C \in (OD)$. Mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ se intersectează în S, iar $\widehat{SAB} \equiv \widehat{SCD}$.

a) Demonstraţi că $BC = AD$.

b) Dacă, în plus, punctele B, D şi S sunt coliniare, iar $m(\widehat{SAB}) = 60°$, arătaţi că $AC \perp SC \Leftrightarrow BS = 2 \cdot SD$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VI.107. Se consideră A, B, C, D, E, F şase puncte în plan astfel încât $AB = CD = CF = DF = 3cm$, $BC = BE = CE = 5cm$, iar $AD = 11cm$. Stabiliţi câte drepte determină cele şase puncte.

Gabriel Popa, Iaşi

VI.108. Un ogar situat în vârful A al unei curţi dreptunghiulare $ABCD$ ($AB = 80m$, $BC = 160m$), porneşte în urmărirea a trei iepuri aflaţi în B, C şi D, alergând de-a lungul gardurilor. Dacă viteza ogarului este $4m/s$, iar vitezele iepurilor sunt $3m/s$, aflaţi după cât timp reuşeşte ogarul să prindă fiecare iepure.

Marian Ciuperceanu, Craiova

Clasa a VII-a

VII.102. În urma unui război dus între două triburi de canibali, în mâinile învingătorilor rămân zece prizonieri, printre care şi căpetenia învinşilor. Şeful de trib al învingătorilor alege, pentru prepararea cinei, câţiva prizonieri (măcar unul), la întâmplare. Care este probabilitatea ca şeful tribului învins să rămână în viaţă?

Gabriel Popa, Iaşi

VII.103. Aflaţi numerele întregi x şi y pentru care $y - 4x + 6 < 0$, $2y - x - 2 > 0$ şi $3y + 2x - 24 < 0$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.104. Spunem că un număr natural are proprietatea (P) dacă este prim, cel puţin egal cu 5 şi se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. Dacă numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ au proprietatea (P), arătaţi că numărul $A = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + n^2 - n + 2$ nu poate fi pătrat perfect.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VII.105. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, definim $a(x, y) = \min(2x - y^2, 2y - x^2)$. Arătaţi că:

a) $a(x, y) \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$; b) $\max\{a(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.106. Se consideră paralelogramul $ABCD, E$ şi F mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AD]$, $\{G\} = CE \cap BD$, $\{H\} = CF \cap BD$, $\{P\} = FG \cap BC$, $\{Q\} = EH \cap CD$. Arătaţi că $3EF = 2PQ$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.107. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{C}) = 60°$, L proiecţia lui A pe BC, M proiecţia lui B pe AC, iar D mijlocul lui $[AB]$. Demonstraţi că triunghiul DML este echilateral.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

VII.108. Considerăm în plan trei cercuri distincte, congruente, ale căror centre nu sunt coliniare. Construiţi cu rigla şi compasul un cerc la care cercurile date să fie tangente interior.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.102. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-\dfrac{26}{5}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.103. Arătaţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n^4\cdot m+1$ este număr compus.

Lucian Tuţescu şi Ion Vişan, Craiova

VIII.104. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3x^2y^2z^2$. Demonstraţi că $\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{y^2+y+1}+\dfrac{1}{z^2+z+1}\le 1.$

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

VIII.105. Determinaţi $x,y\in\mathbb{N}^*$ pentru care $x^3-y^3=3xy+17$.

Liviu Smarandache şi Ion Vişan, Craiova

VIII.106. În tetraedul $VABC$, avem $AB=4cm, BC=5cm, CA=6cm$, iar ariile feţelor VAB, VBC şi VCA sunt egale cu $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}cm^2$. Calculaţi sinusurile unghiurilor $\widehat{AVB}, \widehat{BVC}$ şi $\widehat{CVA}$.

Vlad Emanuel, student, Bucureşti

VIII.107. Fie $ABCD$ un tetraedru, iar m_1, m_2 şi m_3 lungimile bimedianelor sale. Demonstraţi că $3(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+CD^2+DB^2)\ge 4(m_1+m_2+m_3)^2$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VIII.108. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A_{ij}(i,j)$, unde $1\le i,j\le 5$. Determinaţi numărul triunghiurilor care au ca vârfuri trei dintre punctele date.

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.96. Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se exprimă prin numere naturale. (*În legătură cu X.78 din RecMat 1/2007.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

IX.97. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $m_a^2h_bh_c+m_b^2h_ch_a+m_c^2h_ah_b\ge 4S^2\left(2+\dfrac{r}{2R}\right)$.

Cătălin Cristea, Craiova

IX.98. Aflaţi $a,b,c\in\mathbb{R}, a\ne 0$, pentru care $|ax^2+bx+c|\le\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Marian Ursărescu, Roman

IX.99. Fie $k \in [0,1), n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$, $\beta_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i \in \{-1,1\}, i = \overline{1,n}$, astfel încât $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon_n\alpha_n = 0$. Rezolvaţi ecuaţia

$$|\alpha_1 x + \beta_1| + |\alpha_2 x + \beta_2| + \ldots + |\alpha_n x + \beta_n| = k|\varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \ldots + \varepsilon_n\beta_n|.$$

Dumitru Mihalache şi Gabi Ghidoveanu, Bârlad

IX.100. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale, cu $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$ şi $3 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k^2 - a_k^2 b_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^3 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3, \forall n \geq 1$. Demonstraţi că, pentru orice $n \geq 1$, există $\alpha_n \in \{0,1\}$ astfel încât $b_n = \alpha_n(a_1 + \ldots + a_n) - (1-\alpha_n)(a_1 + \ldots + a_{n-1})$.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a X-a

X.96. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu suma 1, demonstraţi că $a^b \cdot b^c \cdot c^a + b^a \cdot c^b \cdot a^c \leq 2(ab + bc + ca)$.

Dorin Mărghidanu, Craiova

X.97. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ numere complexe distincte astfel încât $(a-b)^3 = (b-c)^3 = (c-a)^3$. Arătaţi că $|2a - b - c| = |2b - c - a| = |2c - a - b|$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

X.98. Fie $A_i(z_i), i = \overline{1,3}$ vârfurile unui triunghi din planul xOy şi $P(z)$ un punct din acest plan (z_i şi z sunt afixele punctelor A_i, respectiv P). Să se arate că P este situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ sau pe una din laturile sale dacă şi numai dacă există $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,3}$, astfel încât $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

X.99. Considerăm triunghiurile echilaterale ABC şi $A_1B_1C_1$ şi construim triunghiurile echilaterale $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, AB_1A_3$, BC_1B_3, CA_1A_3, AC_1A_4, BA_1B_4 şi CB_1C_4; toate triunghiurile citate sunt orientate pozitiv. Fie punctele $M_2 \in A_2B$, $N_2 \in B_2C$, $P_2 \in C_2A$, $M_3 \in A_3B$, $N_3 \in B_3C$, $P_3 \in C_3A$, $M_4 \in A_4B$, $N_4 \in B_4C$ şi $P_4 \in C_4A$ astfel încât $\dfrac{M_2A_2}{M_2B} = \dfrac{N_2B_2}{N_2C} = \dfrac{P_2C_2}{P_2A} = \dfrac{M_3A_3}{M_3B} = \dfrac{N_3B_3}{N_3C} = \dfrac{P_3C_3}{P_3A} = \dfrac{M_4A_4}{M_4B} = \dfrac{N_4B_4}{N_4C} = \dfrac{P_4C_4}{P_4A}$. Demonstraţi că triunghiurile $M_2N_2P_2, M_3N_3P_3$ şi $M_4N_4P_4$ sunt echilaterale şi au acelaşi centru.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

X.100. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\sin^2 A(\sin B + \sin C)^2} + \frac{1}{\sin^2 B(\sin C + \sin A)^2} + \frac{1}{\sin^2 C(\sin A + \sin B)^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Clasa a XI-a

XI.96. Fie ε rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii, iar $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det(A + \varepsilon B) = 0$. Demonstraţi că $\det(A - B) = \det A - \det B$.

Dan Popescu, Suceava

XI.97. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Arătaţi că pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, există $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ astfel încât $A^p \neq I_n$, $\forall p \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ şi $A^k = I_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.98. Demonstraţi că funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ este concavă şi, folosind eventual acest lucru, arătaţi că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea $\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \cdot \frac{1-\cos B}{1+\cos B} \cdot \frac{1-\cos C}{1+\cos C} \leq \frac{1}{27}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XI.99. Studiaţi convergenţa şirului $(v_n)_{n\geq 1}$ definit prin $v_{n+1} = \frac{(v_n^c + d)^{1/c}}{v_n}$, $\forall n \geq 1$, unde v_1, c şi d sunt numere reale pozitive date.

Gheorghe Costovici şi Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.100. Demonstraţi că

$$(x+1)\left(\sin\frac{\pi}{x+1} - \cos\frac{\pi}{x+1}\right) < x\left(\sin\frac{\pi}{x} - \cos\frac{\pi}{x}\right), \forall x \in [2, \infty).$$

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.96. Rezolvaţi în S_5 ecuaţia $x^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Liviu Smarandache şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

XII.97. Fie $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n}$, iar $m \in (0, \infty)$ astfel încât $\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{m+k} = 0$. Să se arate că ecuaţia $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ admite soluţie în intervalul $(0, 1)$.

Mihail Bencze, Braşov

XII.98. Determinaţi primitivele funcţiei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin^{3n-1} x \cdot \cos^{n-1} x}{\sin^{4n} x + \cos^{4n} x}$, $n \in \mathbb{N}$.

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

XII.99. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ continuă şi descrescătoare şi şirul strict crescător $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive, astfel încât şirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Definim $I_n = \frac{1}{a_n}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $(I_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XII.100. În raport cu un reper cartezian xOy, considerăm punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ şi $T \in (AB)$, unde $a > 0, b > 0$. Determinaţi parabola $y = \lambda x^2 + \mu$ care este tangentă în T la AB, ştiind că aria suprafeţei determinată de parabolă şi axele de coordonate este maximă.

Adrian Corduneanu, Iaşi