Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 1/2008

A. Nivel gimnazial

G136. *Determinaţi numerele reale x, y, z, pentru care*

$$2^{-x} + 3 \cdot 2^{-y} + 2^{-z} = 2^x + 3 \cdot 2^{y+2} + 2^{z+2} = 9.$$

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Este binecunoscută inegalitatea $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in (0, \infty)$, cu egalitate când $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Atunci:

$$9 = 2^{-x} + 3 \cdot 3^{-y} + 2^{-z} = \frac{1^2}{2^x} + \frac{6^2}{3 \cdot 2^{y+2}} + \frac{2^2}{2^{z+2}} \geq \frac{9^2}{2^x + 3 \cdot 2^{y+2} + 2^{z+2}} = 9$$

şi deducem că $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{y+1}} = \frac{1}{2^{z+1}} = t$. Obţinem că $t + 6t + 2t = 9$, prin urmare $t = 1$ şi astfel $x = 0$, $y = -1, z = -1$.

Soluţia 2 (Paul Georgescu). Egalităţile din enunţ se pot rescrie sub forma $2^{-x} + 6 \cdot 2^{-(y+1)} + 2 \cdot 2^{-(z+1)} = 2^x + 6 \cdot 2^{y+1} + 2 \cdot 2^{z+1} = 9$. Din inegalitatea CBS urmează că

$9 \cdot 9 = (2^{-x} + 6 \cdot 2^{-(y+1)} + 2 \cdot 2^{-(z+1)})(2^x + 6 \cdot 2^{y+1} + 2 \cdot 2^{z+1}) \geq$
$\geq (\sqrt{2^{-x}} \cdot \sqrt{2^x} + \sqrt{6 \cdot 2^{-(y+1)}} \cdot \sqrt{6 \cdot 2^{y+1}} + \sqrt{2 \cdot 2^{-(z+1)}} \cdot \sqrt{2 \cdot 2^{z+1}})^2 = 9^2.$

Cum se atinge efectiv egalitatea, obţinem că $2^x = 2^{y+1} = 2^{z+1}$ şi, după înlocuire, deducem că $x = 0$, $y = -1$, $z = -1$.

G137. *Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $\lambda = \frac{2\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Să se exprime în funcţie de a, b, c şi λ numărul real $\mu = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$.*

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Amplificăm succesiv fracţia ce defineşte λ cu $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}, \sqrt{c}$; notând $x = \sqrt{ab}$, $y = \sqrt{bc}$, $z = \sqrt{ca}$, obţinem:

$$2a + x - z = \lambda(a + x + z); 2x + b - y = \lambda(x + b + y); 2z + y - c = \lambda(z + y + c) \Leftrightarrow$$
$$(1 - \lambda)x - (1 + \lambda)z = a(\lambda - 2); (2 - \lambda)x - (1 + \lambda)y = b(\lambda - 1);$$
$$(1 - \lambda)y + (2 - \lambda)z = c(\lambda + 1).$$

Din acest sistem putem afla x, y, z în funcţie de a, b, c şi λ. Cum $\mu \cdot \sqrt{a} = \frac{a - x - z}{2a + x + z}$, deducem că $\mu = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{a \cdot A \cdot C - B \cdot C + A \cdot D}{2a \cdot A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D}$, unde $A = 2(2 - 3\lambda + \lambda^2)$, $B = c(1+\lambda)^2 - b(1-\lambda)^2 - a(2-\lambda)^2$, $C = 2(2+\lambda-\lambda^2)$, $D = c(1+\lambda)^2 - b(1-\lambda)^2 + a(2-\lambda)^2$.

G138. *a) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât $4abc = a+b+c+1$. Să se arate că* $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{b^2+a^2}{c}\geq 2\,(ab+bc+ca)$.

b) Numerele reale pozitive a, b, c sunt astfel încât $\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}+\dfrac{b^2+a^2}{c}\leq 2\,(ab+bc+ca)$. *Să se arate că $a+b+c+1\leq 4abc$.*

Andrei Laurenţiu Ciupan, elev, Bucureşti

Soluţie. a) Conform inegalităţii CBS, avem că $\left(\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+a^2\right)(a+a+1)\geq (a+b+c)^2$ şi încă două relaţii similare; prin adunare, obţinem că

$$\sum\frac{b^2+c^2}{a}+\sum a^2\geq (a+b+c)^2\cdot\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right). \qquad (1)$$

Din condiţia $4abc=a+b+c+1$ rezultă imediat că $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}=1$ şi, folosind (1), urmează că

$$\sum\frac{b^2+c^2}{a}+(a^2+b^2+c^2)\geq (a+b+c)^2\Rightarrow\sum\frac{b^2+c^2}{a}\geq 2(ab+bc+ca).$$

b) Folosind (1) şi ipoteza, găsim că

$$(a+b+c)^2\geq\sum\frac{b^2+c^2}{a}+\sum a^2\geq (a+b+c)^2\cdot\sum\frac{1}{2a+1}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\leq 1\Rightarrow\sum(2a+1)(2b+1)\leq(2a+1)(2b+1)(2c+1)$$
$$\Rightarrow 4\sum ab+4\sum a+3\leq 4\sum ab+2\sum a+8abc+1\Rightarrow a+b+c+1\leq 4abc.$$

G139. *Denisa scrie pe tablă numerele* 1, 2, 3, ..., 2008. *Ea alege două numere, le şterge de pe tablă şi scrie în loc modulul diferenţei lor, repetând această operaţie până când pe tablă rămâne un singur număr. Poate proceda Denisa în aşa fel încât numărul rămas să fie* 2007*? Dar* 2008*?*

Iulieta Grigoraş, Iaşi

Soluţie. Se constată uşor că paritarea numărului de numere impare de pe tablă este un invariant. Cum iniţial sunt 1004 numere impare, în final trebuie să avem un număr par de numere impare şi acest număr va fi zero, prin urmare pe tablă nu poate rămâne 2007.

La a doua întrebare, răspunsul este afirmativ. Un procedeu de a obţine 2008 ar putea fi următorul: Denisa înlocuieşte numerele 2 şi 3 cu $1, 4$ şi 5 cu $1,\ldots,2006$ şi 2007 cu 1 şi rămâne astfel cu 1004 de 1 şi un 2008. Alegând perechi $(1,1)$ şi înlocuindu-le cu 0, rămâne cu 502 de 0 şi un 2008. Indiferent ce va face în continuare, în final rămâne pe tablă numărul 2008.

G140. *Un poligon cu n laturi este împărţit în $n-2$ triunghiuri cu ajutorul a $n-3$ diagonale ale sale care nu se intersectează în puncte interioare (o astfel de împărţire se numeşte triangulaţie a poligonului). Notăm cu T_0 numărul triunghiurilor ale căror* *laturi sunt toate diagonale ale poligonului şi cu T_2 numărul triunghiurilor care au câte două laturi care sunt laturi şi pentru poligon, iar a treia latură diagonală a poligonului. Să se arate că $T_2 = T_0 + 2$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Mai considerăm şi triunghiurile care au exact o latură care este şi latură a poligonului şi notăm cu T_1 numărul lor. Avem că $n = 2T_2 + T_1$ (numărând în două feluri laturile poligonului) şi că $n - 2 = T_2 + T_1 + T_0$ (numărând în două moduri triunghiurile). Egalând cele două expresii ale lui n, obţinem că $2T_2 + T_1 = T_2 + T_1 + T_0 + 2$, de unde $T_2 = T_0 + 2$.

G141. *Se consideră o reţea de drepte care formează prin intersecţii pătrate congruente. Marcăm $2n + 1$ vârfuri ale unor astfel de pătrate, $n \geq 2$, astfel încât orice dreaptă din reţea să conţină cel mult un punct marcat. Să se arate că există măcar două puncte marcate care sunt separate atât pe orizontală, cât şi pe verticală, de câte un număr impar de drepte ale reţelei.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Asociem nodurilor reţelei coordonate întregi. Fie $N_1(a_1, b_1)$, $N_2(a_2, b_2)$, $\ldots, N_j(a_j, b_j)$, $j \geq n + 1$, numărul maxim de puncte marcate pentru care abscisele $a_1, a_2, \ldots, a_j$ au aceeaşi paritate; sumele $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{j-1} + a_j$ vor fi toate pare. Dintre numerele $b_1, b_2, \ldots, b_j$, cel puţin $\dfrac{j}{2}$ sau $\left[\dfrac{j}{2}\right] + 1$, funcţie de paritatea lui j, au aceeaşi paritate. Cum $\min\{\dfrac{j}{2}, \left[\dfrac{j}{2}\right] + 1\} \geq 2$, înseamnă că cel puţin o sumă dintre $b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_{j-1} + b_j$ este pară; fie aceasta $b_p + b_q$. Vom arăta că punctele $N_p(a_p, b_p)$ şi $N_q(a_q, b_q)$ îndeplinesc cerinţa din enunţ.

Avem că $\dfrac{a_p + a_q}{2}, \dfrac{b_p + b_q}{2} \in \mathbb{Z}$, deci mijlocul O al segmentului N_pN_q este nod al reţelei. Fie d_0, d_p, d_q dreptele orizontale ale reţelei care trec prin O, N_p, respectiv N_q. Numărul dreptelor din reţea cuprinse între d_0 şi d_p este acelaşi cu cel al dreptelor cuprinse între d_0 şi d_q; fie k acest număr. Atunci N_p şi N_q sunt separate pe orizontală de $2k + 1$ drepte (incluzând şi pe d_0). Analog se judecă pe verticală.

G142. *Spunem că vârful A al triunghiului ABC are proprietatea (P) dacă $AX < BC$, $\forall X \in (BC)$. Să se arate că dacă fiecare vârf al $\triangle ABC$ are proprietatea (P), atunci triunghiul este echilateral.*

Doru Buzac, Iaşi

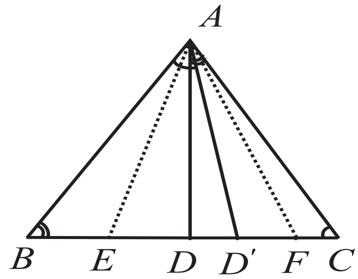
Soluţie. Arătăm întâi că dacă $\triangle ABC$ este echilateral, fiecare vârf are proprietatea (P). Fie $X \in (BC)$; atunci $m(\widehat{AXB}) > m(\widehat{ACX})$ (proprietate a unghiului exterior), deci $m(\widehat{AXB}) > m(\widehat{ABX})$ şi atunci $AB > AX$, prin urmare $AX < BC$ şi astfel vârful are proprietatea (P). Analog se procedează pentru celelalte vârfuri.

În continuare, demonstrăm că dacă $\triangle ABC$ nu este echilateral, vârful care se opune laturii mai scurte nu are proprietatea (P). Să zicem că c este latura cea mai scurtă; raţionamentul funcţionează şi dacă sunt două laturi de lungime c. Notăm $\{M\} = (BC) \cap \mathcal{C}(C, c)$, $\{N\} = (AC) \cap \mathcal{C}(C, c)$ şi fie Y un punct oarecare al arcului $\widehat{MN}$, interior triunghiului (evident că există astfel de puncte). Dacă $\{X\} = CY \cap (AB)$, atunci $CX > CY = c = AB$, prin urmare vârful C nu are proprietatea (P).

G143. *Considerăm triunghiul ABC, iar D, D' sunt puncte pe dreapta BC astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, iar $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{CAD'}$ taie dreapta BC în E, respectiv F. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Sunt de considerat mai multe cazuri, după cum unul sau ambele puncte D şi D' se află pe segmentul $[BC]$; vom face justificarea în situaţia din figură, în rest judecându-se analog.

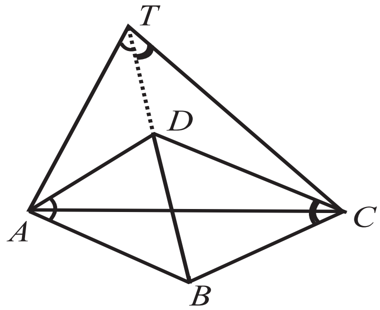


Deoarece $m(\widehat{AFB}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{BAD'}) + m(\widehat{D'AF}) = m(\widehat{BAF})$, înseamnă că $\triangle ABF$ este isoscel şi analog $\triangle ACE$ va fi tot isoscel. Mediatoarele segmentelor $[AF]$ şi $[AE]$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$ şi de aici urmează concluzia dorită.

G144. *Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$. Să se arate că $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ dacă şi numai dacă $AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot BD^2$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $T, S \in (BD$ astfel încât $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BAD}$, iar $\widehat{CSB} \equiv \widehat{BCD}$. Din asemănarea $\triangle ABT \sim \triangle DBA$ (U.U.), obţinem că $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BT}{AB} = \dfrac{AT}{DA}$, prin urmare $BT = \dfrac{AB^2}{BD}$, iar $AT = \dfrac{AB \cdot AD}{BD}$. Analog, din $\triangle DBC \sim \triangle CBS$ obţinem că $BS = \dfrac{BC^2}{BD}$, iar $CS = \dfrac{BC \cdot CD}{BD}$. Cum $AB = BC$, rezultă că $BT = BS$, deci $T = S$. Atunci:



$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 90^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ATC}) = 90^\circ \Leftrightarrow AT^2 + TC^2 = AC^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{AB^2 \cdot AD^2}{BD^2} + \frac{BC^2 \cdot CD^2}{BD^2} = AC^2 \Leftrightarrow BC^2 \cdot AD^2 + AB^2 \cdot CD^2 = AC^2 \cdot BD^2.$$

G145. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$, iar pe arcul deschis $\overset{\frown}{BC}$ care nu-l conţine pe A al cercului circumscris triunghiului se ia un punct M. Să se arate că*
$$\sqrt{MB \cdot MC} < MA < \sqrt{MB \cdot MC} + \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{MB \cdot MC}}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Fie $2\alpha = m(\widehat{BAC})$; evident că $BC = 2AB \cdot \sin\alpha$. Aplicând prima teoremă a lui Ptolemeu patrulaterului inscriptibil $ABMC$, obţinem:

$$AM \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB \Leftrightarrow 2AM \cdot AB \cdot \sin\alpha = AB(MB + MC) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow MA = \frac{MB + MC}{2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \geq \sqrt{MB \cdot MC} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} > \sqrt{MB \cdot MC},$$

cu inegalitate strictă deoarece $\alpha < 90°$. Aplicând acum a doua teoremă a lui Ptolemeu, avem:

$$\frac{MA}{BC} = \frac{AB \cdot AC + MB \cdot MC}{AB \cdot MB + AC \cdot MC} \Rightarrow \frac{MA}{2AB \cdot \sin\alpha} = \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{AB(MB + MC)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA = \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{\frac{MB + MC}{2}} \cdot \sin\alpha < \frac{AB^2 + MB \cdot MC}{\sqrt{MB \cdot MC}} \cdot 1,$$

de unde concluzia problemei.

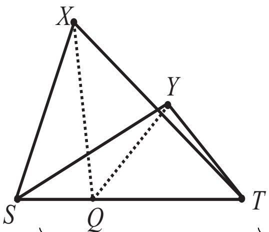
B. Nivel liceal

L136. *Fie A, B, C trei puncte pe sfera $\mathcal{S}$ de centru O, iar M_1 şi M_2 două puncte exterioare sferei astfel încât OM_1 şi OM_2 să intersecteze planul (ABC) în două puncte interioare $\triangle ABC$. Dacă $M_1A \geq M_2A$, $M_1B \geq M_2B$ şi $M_1C \geq M_2C$, să se arate că $M_1O \geq M_2O$.*

Cătălin Ţigăeru, Suceava

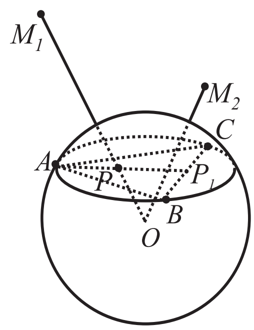
Soluţie. Vom demonstra întâi un rezultat ajutător:

Lemă. Se consideră segmentul ST, iar X, Y sunt puncte în spaţiu astfel încât $XS \geq YS, XT \geq YT$. Dacă $Q \in [ST]$, atunci $XQ \geq YQ$.



Vom nota $\overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{XS}, \overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{XT}$, $\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{YS}$, $\overrightarrow{b}_2 = \overrightarrow{YT}$, $\lambda = \dfrac{SQ}{ST} \in [0,1]$; avem că $\overrightarrow{XQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{a}_1 + \lambda\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{YQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{b}_1 + \lambda\overrightarrow{b}_2$, iar $\overrightarrow{a}_2 - \overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_1$. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) = |(1-\lambda)\overrightarrow{a}_1 + \lambda\overrightarrow{a}_2|^2 - |(1-\lambda)\overrightarrow{b}_1 + \lambda\overrightarrow{b}_2|^2 = 2\lambda \cdot [\overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{a}_2 - \overrightarrow{b}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 - |\overrightarrow{a}_1|^2 + |\overrightarrow{b}_1|^2] + |\overrightarrow{a}_1|^2 - |\overrightarrow{b}_1|^2$. Avem de-a face cu o funcţie liniară, cu $f(0) = |\overrightarrow{a}_1|^2 - |\overrightarrow{b}_1|^2 \geq 0$ şi $f(1) = |\overrightarrow{a}_2|^2 - |\overrightarrow{b}_2|^2 \geq 0$; deducem că $f(\lambda) \geq 0$, $\forall\lambda \in [0,1]$ şi astfel lema este demonstrată.

Revenim la problemă: fie $\{P\} = M_1O \cap (ABC)$, $\{P_1\} = AP \cap BC$, unde $P_1 \in [BC]$ şi $P \in [AP_1]$, conform ipotezei. Aplicând de două ori lema precedentă, obţinem că $M_1P_1 \geq M_2P_1$, apoi că $M_1P \geq M_2P$. Atunci $M_2O \leq M_2P + PO \leq M_1P + PO = M_1O$, ceea ce încheie soluţia.

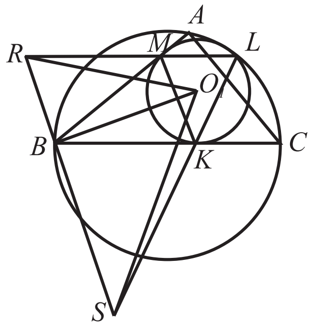


L137. *Considerăm $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi fie $\mathcal{C}_1$ cercul de centru O_1, tangent la AB, BC şi la cercul $\mathcal{C}$ în M, K, respectiv L. Paralela prin B la MK intersectează dreptele LM şi LK în R, respectiv S. Să se arate că unghiul $\widehat{RO_1S}$ este ascuţit.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie Q punctul de pe semidreapta $[BO_1$ pentru care unghiul $\widehat{RQS}$

este drept. Cum $O_1B \perp MK$ şi $MK \parallel RS$, rezultă că $O_1B \perp RS$. Conform teoremei înălţimii, avem că $QB^2 = RB \cdot BS$ şi atunci concluzia problemei revine la a demonstra că $O_1B^2 > RB \cdot RS (*)$.

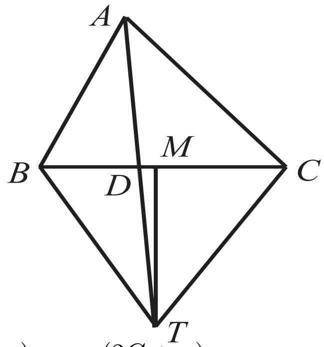


Avem că $\widehat{BKS} \equiv \widehat{LKC} \equiv \widehat{LMK} \equiv \widehat{MRB}$, iar $m(\widehat{MBR}) = m(\widehat{KBS}) = 90° - \frac{1}{2} m(\widehat{B})$ ($[BO_1$ fiind bisectoare pentru $\widehat{ABC}$). Rezultă că $\triangle MRB \sim \triangle SKB$, de unde $\frac{MB}{SB} = \frac{RB}{KB} \Leftrightarrow MB^2 = RB \cdot SB$. Însă $O_1B > MB$ şi astfel deducem că $(*)$ este adevărată, ceea ce încheie rezolvarea.

L138. *Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, $m(\widehat{A}) < 90°$, unghiul $\widehat{A}$ fiind cel mai mare al triunghiului. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ şi T punctul de intersecţie al simedianei din A cu mediatoarea lui $[BC]$. Să se arate că $2AM < AT$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Cristian Pravăţ, Iaşi

Soluţie. Fie $\{D\} = AT \cap BC$ şi $\alpha = m(\widehat{CBT}) = m(\widehat{BCT})$. Cum AD este simediană, avem:



$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{S_{BTD}}{S_{CTD}} = \frac{S_{ABD} + S_{BTD}}{S_{ACD} + S_{CTD}} =$$
$$= \frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin(B + \alpha)}{AC \cdot CT \cdot \sin(C + \alpha)}$$
$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin(B + \alpha)}{\sin(C + \alpha)}.$$

Folosind teorema sinusurilor şi faptul că $B \neq d$, deducem că

$$\sin B \sin(B + \alpha) = \sin C \sin(C + \alpha) \Leftrightarrow \cos(2B + \alpha) = \cos(2C + \alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2B + \alpha = 360° - 2C - \alpha \Leftrightarrow A = \alpha.$$

Ţinând cont că $BT = \frac{a}{2\cos A}$ şi $AM^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$, cu teorema cosinusului în $\triangle ABT$ obţinem:

$$AT^2 = c^2 + \frac{a^2}{4\cos^2 A} - 2c\frac{a}{2\cos A} \cdot \cos(A + B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2T \cos A)^2 = c^2(2\cos A)^2 + a^2 + ac \cdot (2\cos A)(2\cos C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2AT \cos A)^2 = \frac{c^2(b^2 + c^2 - a^2)}{b^2c^2} + a^2 + ac \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \cdot \frac{b^2 - c^2 + a^2}{ab} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2AT \cos A)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Leftrightarrow (2AT \cos A)^2 = 4AM^2 \Leftrightarrow AM = AT \cos A.$$

Însă $\widehat{A}$ este cel mai mare unghi, deci $m(\widehat{A}) > 60°$ şi astfel $\cos A < \cos 60° = \frac{1}{2}$, de unde concluzia problemei.

L139. *Fie $A_1A_2\cdots A_n$ un poligon regulat, iar M un punct variabil în interiorul sau pe laturile poligonului. Să se determine maximul produsului $f(M)=MA_1\cdot MA_2\cdot\cdots\cdot MA_n$, precum şi punctele M care realizează acest maxim, în fiecare din cazurile:* *a)* $n=3$; *b)* $n=6$.

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât vârfurile triunghiului echilateral să aibă afixele $A_1(O), A_2(1), A_3(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Dacă z este afixul lui M, atunci $g(z)=z(z-1)(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$ este o funcţie olomorfă pentru z în domeniul plan delimitat de triunghi. Conform principiului maximului modulului, maximul lui $f(M)=|g(z)|$ se realizează pe frontiera domeniului, iar datorită simetriei triunghiului echilateral este suficient să căutăm acest maxim pentru $M\in[A_1A_2]$. Aceasta înseamnă că trebuie să găsim maximul lui $|g(z)|$ pentru $z=x\in[0,1]$, unde

$$|g(x)|^2=x^2(1-x)^2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]=x^2(1-x)^2(x^2-x+1)\le\frac{3}{64}.$$

Într-adevăr, după calcule, inegalitatea anunţată se dovedeşte a fi echivalentă cu $(2x-1)^2[4x(x-1)(4x^2-4x+3)-3]\le 0$, iar aceasta este clară pentru $x\in[0,1]$. Egalitatea se atinge doar pentru $x=\frac{1}{2}$. În concluzie, maximul produsului $f(M)$ este $\frac{\sqrt{3}}{8}$ şi este atins când M este unul dintre mijloacele laturilor triunghiului.

b) Procedăm ca mai înainte: alegem un reper cartezian în raport cu care $A_1(0,0)$, $A_2(1,0), A_3\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_4(1,\sqrt{3})$, $A_5(0,\sqrt{3})$; $A_6\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi folosind principiul maximului modulului şi considerentele de simetrie, vom considera că $M\in[A_1A_2]$, deci $M(x,0)$, cu $x\in[0,1]$. Atunci

$$[f(M)]^2=x^2(1-x)^2(x^2-3x+3)(x^2-2x+4)(x^2+3)(x^2+x+1)$$

şi maximul acestei expresii poate fi determinat cu inegalitatea mediilor:

$$\begin{aligned}&x^2(1-x)^2\cdot\frac{x^2-3x+3}{7}\cdot\frac{x^2-2x+4}{13}\cdot\frac{x^2+3}{13}\cdot\frac{x^2+x+1}{7}\le\\&\le\left[\frac{1}{6}(2x(1-x)+\frac{x^2-3x+3}{6}+\frac{x^2-2x+4}{13}+\frac{x^2+3}{13}+\frac{x^2+x+1}{7})\right]^6=\\&=\left[\frac{142x(1-x)+101}{6\cdot 91}\right]^6\le\left(\frac{\frac{71}{2}+101}{6\cdot 91}\right)^6=\frac{1}{4^6}.\end{aligned}$$

La urmă am folosit inegalitatea $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ (faptul că $x\in[0,1]$ asigură că produsul $x(1-x)$ este nenegativ). Egalitatea are loc pentru $x(1-x)=\frac{x^2-3x+3}{7}=$

$\dfrac{x^2-2x+4}{13}=\dfrac{x^2+3}{13}=\dfrac{x^2+x+1}{7}$ şi $x(1-x)=\dfrac{1}{4}$, deci dacă şi numai dacă $x=\dfrac{1}{2}$, caz în care M este mijlocul laturii $[A_1A_2]$. În concluzie, $f(M)\le\dfrac{91}{64}$ şi maximul se atinge în mijloacele laturilor hexagonului.

L140. *Fie* $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ *astfel încât* $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)(b+c)(c+a)=4$. *Să se arate că* $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\ge\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}$.

Andrei Vrăjitoarea, elev, Craiova

Soluţia 1 (Marius Olteanu, Rm. Vâlcea). Din identitatea $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]+3abc$, rezultă că $(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^2)$. Ţinând seama de acest fapt, inegalitatea dată se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3abc\\&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2\ge(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Din inegalitatea lui Cebîşev, avem că $a^3+b^3+c^3\ge\dfrac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ şi atunci, pentru a demonstra (1), ar fi destul să arătăm că

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{2}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a+b+c\le\frac{3}{2},\end{aligned}\tag{2}$$

deoarece $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow a^2+b^2+c^2>0$.

Notăm $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{b+c}{2}$, $z=\dfrac{c+a}{2}$; condiţia din enunţ devine $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Conform problemei 19, pg. 10, din *Old and New Inequalities*, autori T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, apărută la Editura GIL, Zalău, 2002, rezultă că $x+y+z\le\dfrac{3}{2}$ şi, de aici, urmează (2). Astfel, soluţia problemei este încheiată.

Soluţia 2 (a autorului). Vom demonstra că orice ecuaţie de forma $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta\gamma=4$ are soluţiile pozitive de forma $(2\cos A,2\cos B,2\cos C)$, unde A,B,C sunt unghiurile unui triunghi ascuţitunghic. Într-adevăr, se observă imediat că $\alpha,\beta,\gamma\in(0,2)$ şi atunci există $A,B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\alpha=2\cos A$, $\beta=2\cos B$. Ecuaţia $\gamma^2+4\cos A\cos B\cdot\gamma+4(\cos^2A+\cos^2B-1)=c$ are discriminantul $16(\cos^2A-1)(\cos^2B-1)=16\sin^2A\sin^2B$ şi singura soluţie cu şansa de a fi pozitivă este $\gamma=-2\cos(A+B)$, dacă $A+B>\dfrac{\pi}{2}$. Considerând $C=\pi-(A+B)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $\gamma=2\cos C$. Reciproc, un triplet de forma anunţată este soluţie a ecuaţiei, fapt care rezultă din identitatea $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z+2\cos x\cos y\cos z-1=4\cos\dfrac{x+y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{-x+y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y+z}{2}\cdot\cos\dfrac{x+y-z}{2}$. În concluzie, avem că $a+b=2\cos A$, $b+c=2\cos B$, $c+a=2\cos C$ şi, cu substituţiile $x=\sqrt{\dfrac{a}{bc}}$, $y=\sqrt{\dfrac{b}{ca}}$,

$z = \sqrt{\frac{c}{ab}}$, inegalitatea de demonstrat devine

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos A + 2yz\cos B + 2zx\cos C, \qquad (*)$$

unde $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, iar A, B, C sunt unghiurile unui triunghi ascuţitunghic.

Rămâne să justificăm $(*)$. Trecem totul în stânga şi gândim expresia ca fiind de gradul II în x. Astfel, ar fi suficient să demonstrăm că discriminantul este negativ; avem:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(y\cos A + z\cos C)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz\cos B) = \\ &= 4y^2(\cos^2 A - 1) + 4z^2(\cos^2 C - 1) + 8yz(\cos A\cos C + \cos(A + C)) = \\ &= -4y^2\sin^2 A - 4z^2\sin^2 C + 8yz\sin A\sin C = -4(y\sin A - z\sin C)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

$\forall y, z \in \mathbb{R}$, ceea ce încheie soluţia problemei.

L141. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, atunci*

$$\frac{x+2}{2x^2+1} + \frac{y+2}{2y^2+1} + \frac{z+2}{2z^2+1} \geq 3.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Nela Ciceu, Bacău

Soluţie. Pentru $x \geq 0$ avem că $\frac{x+2}{2x^2+1} \geq \frac{3}{x^3+2}(1)$, deoarece

$$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)(x-1)^2 \geq 0,$$

iar ultima inegalitate este evident adevărată pentru x pozitiv. Folosind (1) şi analoagele sale, precum şi inegalitatea mediilor $MH \leq MA$, obţinem:

$$\begin{aligned} &\frac{x+2}{2x^2+1} + \frac{y+2}{2y^2+1} + \frac{z+2}{2z^2+1} \geq 3 \cdot \left(\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+1} + \frac{1}{z^3+2}\right) \\ &\geq 3 \cdot \frac{9}{x^3+2+y^3+2+z^3+2} = 3 \cdot \frac{9}{6+3} = 3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Egalitatea se atinge pentru $x = y = z = 1$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea, care observă că inegalitatea are loc pentru x, y, z din $[\sqrt{3} - 2, +\infty)$ cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

L142. *Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$, numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ şi A mulţimea tuturor sumelor $\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$, unde semnele se aleg în toate modurile posibile. Arătaţi că $|A| > \frac{n^2+n+2}{2}$ şi determinaţi numerele a_n pentru care se atinge egalitatea.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $S = \sum_{k=1}^{m} a_k$, iar $b_i \in A$, atunci $b_i = S - 2(a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k})$, unde $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, k \leq n$, sunt termenii care apar cu minus în b_i. Pentru prima cerinţă a problemei, ar fi suficient să punem în evidenţă $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ termeni distincţi de forma $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}$, $k\in\overline{0,n}$ (pentru $k=0$, termenul este egal cu 0). Aceşti termeni sunt $0<a_1<a_2<\ldots<a_n<a_n+a_1<a_n+a_2<\ldots<a_n+a_{n-1}<a_b+a_{n-1}+a_1<\ldots<a_n+a_{n-1}+a_{n-2}<\ldots<a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1$, în număr de $1+n+(n-1)+\ldots+1=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Dacă A are exact $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ elementele, atunci orice sumă de forma $a_{i_1}+a_{i_2}+\ldots+a_{i_k}$, $0\le k\le n$, trebuie să se regăsească în lista de mai sus. Avem că $a_{n-1}<a_1+a_{n-1}<a_1+a_n$, deci $a_1+a_{n-1}=a_n$. Apoi, $a_{n-2}<a_1+a_{n-2}<a_1+a_{n-1}=a_n$, de unde $a_1+a_{n-2}=a_{n-1}$. Procedând analog, găsim că $a_1+a_{n-3}=a_{n-2},\ldots,a_1+a_3=a_4$, $a_1+a_2=a_3$, prin urmare $a_k=a_2+(k-2)a_1$, $k\in\overline{3,n}$. Totodată, $a_n=a_1+a_{n-1}<a_2+a_{n-2}<a_2+a_n$, deci $a_2+a_{n-2}=a_n+a_1$, adică $a_2=2a_1$ şi astfel $a_k=ka_1$, $k\in\overline{1,n}$. Se vede, uşor că mulţimea A a sumelor de forma $a_1(\pm1\pm2\pm\ldots\pm n)$, cu $a_1\in\mathbb{R}_+^*$ oarecare, are exact $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ elemente.

L143. *Să se arate că pentru p număr natural prim şi $m,n\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, $m>n$, avem* $\dbinom{2p+m}{2p+n}\equiv 2\dbinom{p+m}{p+n}-\dbinom{m}{n}\pmod{p^2}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Considerăm identitatea $(1+X)^{2p+m}=(1+X)^p\cdot(1+X)^p\cdot(1+X)^m$ şi egalăm coeficienţii lui X^{2p+n} din cei doi membri; obţinem că $\dbinom{2p+m}{2p+n}=\displaystyle\sum_{i+j+k=2p+n}\binom{p}{i}\binom{p}{j}\binom{m}{k}$. Deoarece $\dbinom{p}{q}\equiv 0(\operatorname{mod}p)$ pentru $1\le q\le p-1$, rezultă că toţi termenii din suma precedentă care cprespund unor valori $i,j\in\{1,2,\ldots,p-1\}$ sunt $0(\operatorname{mod}p^2)$, prin urmare $\dbinom{2p+m}{2p+n}\equiv 2\cdot\displaystyle\sum_{i+k=p+n}\binom{p}{i}\binom{m}{k}-\binom{m}{n}(\operatorname{mod}p^2)$. Dacă mai ţinem seama şi de binecunoscuta identitate $\displaystyle\sum_{i+k=p+n}\binom{p}{i}\binom{m}{k}=\binom{p+m}{p+n}$, găsim exact congruenţa din enunţ.

L144. *Fie $p\in\mathbb{N}$, $p\ge2$; definim şirurile $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ prin: $x_1=\sqrt{p(p-1)}$, $x_{n+1}=\sqrt{p(p-1)+x_n}$, $y_n=\{2^np^{n-1}x_n\}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară. Să se arate că şirul (y_n) este strict monoton.*

Sorin Puşpană, Craiova

Soluţie. Se justifică uşor prin inducţie inegalităţile

$$2^np^{n-1}x_n<(2p)^n-1,\forall n\in\mathbb{N}^*; \tag{1}$$

$$2^np^{n-1}x_n>(2p)^n-2+\frac{8}{(2p)^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $[2^np^{n-1}x_n]=(2p)^n-2$, prin urmare $y_n=2-2^np^{n-1}(p-x_n)$.

Obţinem că
$$y_{n+1} - y_n = 2^n p^{n-1}(-2p^2 + p + 2px_{n+1} - x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (3)$$
Din recurenţa care-l defineşte pe x_n, avem că $p^2 - x_{n+1}^2 = p - x_n$, iar din (1) deducem că $x_n \leq p, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În acest fel,
$$\frac{p - x_{n+1}}{p - x_n} = \frac{1}{p + x_{n+1}} > \frac{1}{2p} \Rightarrow -2p^2 + p + 2px_{n+1} - x_n < 0$$
şi, ţinând seama de (3), urmează că (y_n) este strict descrescător.

L145. *Fie* $0 < \alpha < \beta$; *definim şirurile* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *prin* $x_0 = \alpha$, $y_0 = 0$, $x_{n+1} = \int_{x_n}^{y_n} e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}} dt$, $y_{n+1} = \int_{y_n}^{x_n} e^{-\frac{\beta^2}{t^2}} dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Arătaţi că cele două şiruri sunt convergente şi aflaţi limitele lor.*

Marius Apetrii, Iaşi

Soluţie. Folosim teorema de medie:
$$x_{n+1} - y_{n+1} = \int_{x_n}^{y_n} (e^{-\frac{\alpha^2}{t^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{t^2}}) dt = (e^{-\frac{\alpha^2}{c_n^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{c_n^2}})(y_n - x_n),$$
unde c_n este un număr între x_n şi y_n. Rezultă că termenii şirului $(x_n - y_n)$ au semne alternante şi, folosind faptul că $x_0 - y_0 > 0$, deducem că $x_{2n} \geq y_{2n}$, $x_{2n+1} \leq y_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Din modul de definire al şirurilor, vom avea că $x_{2n} \geq 0$, $x_{2n+1} \leq 0$, $y_{2n} \leq 0$ şi $y_{2n+1} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrăm prin inducţie că $|x_n - y_n| \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Afirmaţia este adevărată pentru $n = 0$. Dacă presupunem că $|x_n - y_n| \leq \alpha$, cum $x_n y_n \leq 0$, deducem că $|x_n| \leq \alpha, |y_n| \leq \alpha$, deci $|c_n| \leq \alpha$, obţinem că
$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = |e^{-\frac{\alpha^2}{c_n^2}} + e^{-\frac{\beta^2}{c_n^2}}| \cdot |x_n - y_n| \leq \frac{2}{e} \cdot |x_n - y_n| < |x_n - y_n| < \alpha.$$
Din relaţia $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{2}{e}|x_n - y_n|$ mai rezultă că $|x_{n+1} - y_{n+1}| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \cdot |x_0 - y_0|$, deci şirul $(x_n - y_n)$ converge la zero. Cum $|x_{n+1}| \leq |x_n - y_n|$ şi $|y_{n+1}| \leq |x_n - y_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că şirurile din enunţ sunt ambele convergente spre zero.
