PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 1 / 2008

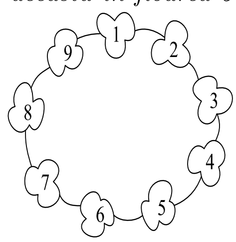
Clasele primare

P.144. *Elevii clasei I intră în clasă în rând câte unul. Câţi elevi sunt în clasă, dacă Matei este al 12-lea când se numără începând din faţă şi al 16-lea când se numără începând din spate?*

(*Clasa I*) **Inv. Elena Porfir, Iaşi**

Soluţie. $(12-1)+16=11+16=27$.

P.145. *Un fluture zboară din floarea 1 în floarea 3, apoi din aceasta în floarea 5 şi aşa mai departe (figura 1). După câte zboruri ajunge în floarea de pe care a plecat?*



(*Clasa I*) **Evelina Zaporojanu, elevă, Iaşi**

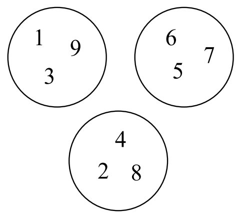
Soluţie. Formăm şirul de numere: 1 3 5 7 9 2 4 6 8 1. Fluturele ajunge în floarea de pe care a plecat după 9 zboruri.

P.146. *După ce fratele meu mi-a dat un sfert din merele sale, le-am amestecat cu cele* 6 *ale mele şi le-am aşezat pe două farfurii, cu câte* 5 *mere fiecare. Câte mere avea fratele meu?*

(*Clasa a II-a*) **Inst. Elena Nuţă, Iaşi**

Soluţie. Pe cele două farfurii au fost aşezate $5+5=10$ (mere). Un sfert din merele fratelui înseamnă $10-6=4$ (mere). Fratele avea $4+4+4+4=16$ (mere).

P.147. *Dacă numerele ar fi puse corect în cele trei cercuri, atunci am avea aceeaşi sumă a celor aflate în fiecare dintre cercuri (figura 2). În câte moduri pot fi aşezate corect aceste numere?*



(*Clasa a II-a*) **Cătălina Istrate, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$; $45=15+15+15$. Avem cazurile:

1) 1+9+5=15; 2+6+7=15; 3+4+8=15;

2) 1+8+6=15; 2+4+9=15; 3+5+7=15.

P.148. *Aflaţi valoarea a ştiind că* $100-99:99-98:98-97:97-\cdots-a:a=11$.

(*Clasa a III-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fiecare împărţire are rezultatul 1; $100-b=11, b=100-11, b=89$. Pe 1 trebuie să-l scădem de 89 ori. De la a la 99, trebuie să avem 89 numere consecutive; $99-a+1=89, 99-a=88, a=99-88=11$.

P.149. *Irina îi spune Mioarei:*

– Dă-mi 2 lei ca să am şi eu cât tine!

Mioara îi răspunde:

– Dă-mi tu 2 lei, să am o sumă de 2 ori mai mare decât suma ce-ţi rămâne ţie!

Ce sumă a avut la început fiecare fată?

(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Mioara are cu $2 + 2 = 4$ (lei) mai mult ca Irina. Suma Irinei, micşorată cu 2 lei, este $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ (lei). La început Irina a avut 8 lei +2 lei = 10 lei, iar Mioara a avut 10 lei +4 lei = 14 lei.

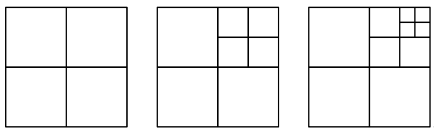
P.150. *Romanul Harry Potter are 7 volume. Ştiind că fiecare volum, începând cu al doilea, are cu 144 pagini mai puţin decât dublul numărului de pagini al volumului precedent, iar al treilea volum are 176 de pagini, aflaţi câte pagini are întregul roman.*
(*Clasa a III-a*) **Robert Vicol, elev, Iaşi**

Soluţie. Volumul al doilea are $(176 + 144) : 2 = 160$ (pagini), iar primul volum are $(160 + 144) : 2 = 152$ pagini. Volumele IV, V, VI, VII au, respectiv, 208 pagini, 272 pagini, 400 pagini, 656 pagini. Însumând, obţinem că întregul roman are 2024 de pagini.

P.151. *Descoperiţi regula de formare a şirului 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... şi scrieţi numărul de pe locul 2008.*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. $1 = 1; 3 = 1 + 2; 6 = 1 + 2 + 3; 10 = 1 + 2 + 3 + 4; \ldots$

Termenul de pe locul 2008 este $1 + 2 + 3 + \ldots + 2008 = 2017036$.

P.152. *În şirul de pătrate egale,*  ..., *fiecare pătrat este împărţit în pătrate mai mici, după o anumită regulă.*

a) Arătaţi că nu există în acest şir un pătrat împărţit în 23 pătrate mai mici;

b) Arătaţi că există în şir un pătrat împărţit în 2008 pătrate mai mici.

(*Clasa a IV-a*) **Ana Tăbăcaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Primul pătrat are $3 \times 1 + 1$ pătrate mai mici, al doilea are $3 \times 2 + 1$ pătrate mai mici, al treilea are $3 \times 3 + 1$ pătrate mai mici etc.

a) $23 = 3 \times 7 + 2$, deci nu există un pătrat în şir cu 23 pătrate mici;

b) $2008 = 3 \times 669 + 1$; pătratul de pe locul 669 este împărţit în 2008 pătrate mai mici.

P.153. *O veveriţă transportă nişte alune la scorbura sa în 6 ore, iar alta face acelaşi lucru în 3 ore. În câte ore cele două veveriţe ar transporta alunele împreună?*
(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Dumitru Chiriac, elev, Iaşi**

Soluţie. Dacă prima veveriţă transportă, în 6 ore, x alune, a doua va transporta, în 6 ore, $2x$ alune. Împreună, ele vor transporta, în 6 ore, $3x$ alune, deci în 2 ore vor transporta x alune.

Clasa a V-a

V.88. *O secvenţă de numere este formată din multipli consecutivi ai lui* 4*, astfel încât suma dintre primul şi ultimul număr este* 280*, iar suma ultimelor două numere este* 508*. Arătaţi că media aritmetică a tuturor numerelor este termen al secvenţei considerate.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numerele date, atunci $a_{n-1} + a_n = 508$ şi, cum $a_n = a_{n-1} + 4$, deducem că $a_n = 256$. Apoi, $a_1 = 280 - a_n = 24$, iar $n = \dfrac{a_n - a_1}{4} + 1 =$

59. Media aritmetică a numerelor va fi 140 şi va fi termen al secvenţei, deoarece $140 \vdots 4$, iar $24 \leq 140 \leq 256$.

V.89. *Determinaţi cifrele x, y, z pentru care* $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 = \overline{168x}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Dacă $x \geq 3$, atunci $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 \geq 30^2 + 30^2 = 1800 > \overline{168x}$. Dacă $x = 1$, atunci $\overline{xy}^2 + \overline{xz}^2 \leq 19^2 + 19^2 = 722 < \overline{168x}$. Rămâne că $x = 2$ şi, datorită simetriei, putem presupune că $y \leq z$. Dacă $z < 9$, atunci $\overline{2y}^2 + \overline{2z}^2 \leq 28^2 + 28^2 = 1568 < 1682$. Deducem că $z = 9$ şi, în acest caz, $\overline{2y}^2 + 29^2 = 1682 \Leftrightarrow \overline{2y}^2 = 841 \Leftrightarrow \overline{2y} = 29 \Leftrightarrow y = 9$. În concluzie, $(x, y, z) = (2, 9, 9)$.

V.90. *Fie $E(n) = 3^n + 5^n$, $n \in \mathbb{N}$. Aflaţi ultimele două cifre ale numerelor $E(10)$ şi $E(2008)$.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Observăm că $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81 = \overline{\ldots 61}$, prin urmare $3^{10} = \overline{\ldots 61} \cdot 9 = \overline{\ldots 49}$. Apoi, $5^{10} = \overline{\ldots 25}$, deci $E(10) = \overline{\ldots 74}$.

Avem că $3^{20} = \overline{\ldots 49} \cdot \overline{\ldots 49} = \overline{\ldots 01}$, de unde $3^{2000} = (3^{20})^{100} = \overline{\ldots 01}$ şi astfel $3^{2008} = 3^{2000} \cdot 3^8 = \overline{\ldots 01} \cdot \overline{\ldots 61} = \overline{\ldots 61}$. În concluzie, $E(2008) = \overline{\ldots 61} + \overline{\ldots 25} = \overline{\ldots 86}$.

V.91. *Să se arate că 61^n, $n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie atât ca sumă, cât şi ca diferenţă de două pătrate perfecte nenule.*

Alexandru Negrescu, student, Iaşi

Soluţie. Dacă $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, atunci:

$$61^n = 61^{2k} \cdot 61 = 61^{2k} \cdot (5^2 + 6^2) = (61^k \cdot 5)^2 + (61^k \cdot 6)^2;$$
$$61^n = 61^{2k} \cdot 61 = 61^{2k} \cdot (31^2 - 30^2) = (61^k \cdot 31)^2 - (61^k \cdot 30)^2.$$

Dacă $n = 2k + 2, k \in \mathbb{N}$, atunci:

$$61^n = 61^{2k} \cdot 3721 = 61^k(60^2 + 11^2) = (61^k \cdot 60)^2 + (61^k \cdot 11)^2;$$
$$61^n = 61^{2k} \cdot 3721 = 61^{2k}(1861^2 - 1860^2) = (61^k \cdot 1861)^2 - (61^k \cdot 1860)^2.$$

V.92. *Demonstraţi că* $\dfrac{2^2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^2}{3} + \cdots + \dfrac{17^2}{16} > 171.$

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Observăm că $\dfrac{n^2}{n-1} = \dfrac{n^2 - n + n - 1 + 1}{n-1} = n + 1 + \dfrac{1}{n-1}$, prin urmare $\dfrac{2^2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^2}{3} + \ldots + \dfrac{17^2}{16} = 4 + \left(4 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(5 + \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(18 + \dfrac{1}{16}\right) = 169 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{8}\right) + \left(\dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{16}\right) > 169 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{8}\right) + \left(\dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{1}{16}\right) = 169 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 171.$

V.93. *Fie $A = \{2, 3, 4, \ldots, 50, 52, 53, \ldots, 100\}$. Folosind fiecare element al lui A câte o singură dată, fie ca numărător, fie ca numitor, se scriu 49 de fracţii. Demonstraţi că măcar una dintre aceste fracţii este reductibilă.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Mulţimea A conţine 50 de elemente pare; conform principului cutiei, dintre cele 49 de fracţii, măcar una va avea şi numărătorul şi numitorul pare, deci se va simplifica prin 2.

V.94. *Fie A mulţimea acelor numere naturale cel mult egale cu* 2008*, care se divid cu* 2*, dar nu se divid cu* 6*. Dacă scriem elementele lui A în ordine descrescătoare, care este al* 322*-lea număr?*

Enache Pătraşcu, Focşani

Soluţie. Scriem multiplii lui 2 în ordine descrescătoare, grupându-i câte trei: (2008, 2006, 2004), (2002, 2000, 1998),.... Multiplii lui 6 apar în fiecare grupă pe al treilea loc; numărul căutat se află în a 161-a grupă, pe a doua poziţie şi acesta va fi 1046.

Clasa a VI-a

VI.88. *Fie a, b, c, d numere raţionale pozitive astfel încât* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *şi* $\dfrac{a+1}{b+1} = \dfrac{c+1}{d+1}$*. Să se arate că* $\dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{c+x}{d+x}$, $\forall x \in \mathbb{Q}_+$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Toţi numitorii care apar sunt strict pozitivi, deci nenuli. Din ipoteză obţinem că $ad = bc$ şi $(a+1)(d+1) = (b+1)(c+1)$, prin urmare $a + d = b + c$. Însă

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x} \Leftrightarrow ad + x(a+d) + x^2 = bc + x(b+c) + x^2$$

şi cum ultima egalitate este adevărată, rezultă concluzia.

VI.89. *Arătaţi că numărul* $N = 1^{2007} + 2^{2007} + \cdots + 2008^{2007}$ *se divide cu* 2009.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Dacă n este impar şi $a, b \in \mathbb{N}$, se ştie că $a^n + b^n = M(a+b)$. Grupând câte doi termenii sumei şi observand că $1^{2007} + 2008^{2007} = M2009, 2^{2007} + 2007^{2007} = M2009, \ldots, 1004^{2007} + 1005^{2007} = M2009$, obţinem concluzia problemei.

VI.90. *Să se determine numerele naturale cu proprietatea că atât ele cât şi răsturnatele lor se scriu ca produs de doi factori primi, fiecare factor având două cifre şi fiind răsturnatul celuilalt.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Să determinăm numerele N care îndeplinesc condiţiile: 1. $N = p \cdot q$ cu p, q prime, 2. $p = \overline{ab}$ şi $q = \overline{ba}$ şi 3. $\overline{N}$, răsturnatul lui N, verifică 1 şi 2.

Din aceste ipoteze rezultă că a şi b nu pot fi pare şi nici 5, adică $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$.

I. $p = q$, ceea ce este echivalent cu $a = b$. Avem $p \in \{11, 33, 77, 99\}$ şi numai $p = 11$ este număr prim. Obţinem o soluţie a problemei: $N = 121 = 11 \cdot 11$.

II. $p \neq q$ şi putem presupune $a < b$. Avem $p \in \{13, 17, 19, 37, 39, 79\}$ şi cum $p = 19$ conduce la $q = 91$ care este compus, iar $p = 39$ este compus, urmează că $p \in \{13, 17, 37, 79\}$. Vom arăta că nu avem soluţii ale problemei pentru niciuna dintre aceste patru valori ale lui p. Într-adevăr, dacă $p = 13$, avem $N = 13 \cdot 31 = 403$ şi $\overline{N} = 304 = 16 \cdot 19$ nu verifică 1. Dacă $p = 17$, atunci $N = 17 \cdot 71 = 1207$ şi $\overline{N} = 7031 = 7 \cdot 17.59$ nu convine. Pentru $p = 37$, avem $N = 37 \cdot 73 = 2701$ şi

$\overline{N} = 1072 = 16 \cdot 67$ nu verifică. În sfârşit, $p = 79$ implică $N = 79 \cdot 97 = 7663$ şi $\overline{N} = 3667 = 19 \cdot 193$, care nu verifică 2.

În concluzie, singura soluţie a problemei este numărul 121.

VI.91. *Considerăm numerele scrise în baza 8:* $a_1 = 0,0\,(4)_{(8)}$*;* $a_2 = 0,0\,(04)_{(8)}$*; …;* $a_n = 0,0(\underbrace{00\ldots0}_{n-1}4)_{(8)}$*. Să se arate că numărul* $N = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ *este divizibil cu* $14_{(10)}$*.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Trecem de la fracţii zecimale la fracţii ordinare; rolul pe care îl are 9 în baza 10 este jucat de 7 în baza 8. Avem:

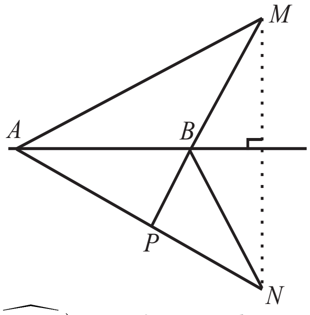
$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(\frac{4}{70}\right)_{(8)} = \frac{4}{7\cdot 8+0} = \frac{1}{14};\\
a_2 &= \left(\frac{4}{770}\right)_{(8)} = \frac{4}{7\cdot 8^2+7\cdot 8+0} = \frac{1}{14(8+1)};\ldots;\\
a_n &= \left(\frac{4}{77\ldots 70}\right)_{(8)} = \frac{4}{7\cdot 8^n+\ldots+7\cdot 8+0} = \frac{1}{14(8^{n-1}+\ldots+8+1)},
\end{aligned}$$

de unde concluzia este evidentă (acolo unde nu am precizat baza de numeraţie, aceasta este 10).

VI.92. *De o parte şi de alta a unei drepte* AB *se consideră punctele* M *şi* N *astfel încât* $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$*,* $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MBN}) = 180°$*, iar* $[AB] \cap [MN] = \emptyset$*. Să se arate că* B *este ortocentrul* $\triangle AMN$*.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Cum $AM = AN$ şi $MB = BN$, înseamnă că punctele A şi B se află pe mediatoarea segmentului $[MN]$, prin urmare $AB \perp MN$. Să arătăm că $MB \perp AN$; ne plasăm în cazul în care $m(\widehat{MAN}) < 90°$, celălalt caz tratându-se analog. Notăm $\{P\} = MB \cap AN$ şi, observând că $P \in (AN)$ (deoarece $[AB] \cap [MN] = \emptyset$), obţinem: $m(\widehat{PBN}) + m(\widehat{PNB}) = [180° - m(\widehat{MBN})] + [90° - m(\widehat{NAB}) - m(\widehat{BNM})] = 270° - [180° - m(\widehat{MAN})] - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}[180° - (180° - m(\widehat{MAN}))] = 90° + m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) - \frac{1}{2}m(\widehat{MAN}) = 90°$. Astfel, $m(\widehat{BPN}) = 90°$ şi rezolvarea este încheiată.



VI.93. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex cu* $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = 80°$ *şi* $AB = CD = DA$ *şi astfel încât există* $F \in (BC)$ *pentru care* $m(\widehat{BAF}) = 20°$*.*

a) Demonstraţi că $\triangle AFD$ *este echilateral.*

b) Determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{C}$ *şi* $\widehat{D}$*.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. a) Avem că $m(\widehat{AFB}) = 180^\circ - m(\widehat{BAF}) - m(\widehat{B}) = 80^\circ$, deci $\triangle ABF$ este isoscel, cu $AB = AF$. Atunci $AD = AF$ şi, cum $m(\widehat{DAF}) = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, deducem că $\triangle ADF$ este echilateral.

b) Din a) şi ipoteză obţinem că $DF = DC$, deci $\triangle DFC$ este isoscel. Pe de altă parte, $m(\widehat{DFC}) = 180^\circ - m(\widehat{DFA}) - m(\widehat{AFB}) = 40^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, iar $m(\widehat{D}) = m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{FDC}) = 60^\circ + 100^\circ = 160^\circ$.

VI.94. *Un joc are trei beculeţe. Primul se aprinde la fiecare două secunde. Al doilea se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apoi la fiecare trei secunde. Al treilea se aprinde prima dată la a două aprindere a primului, apoi la fiecare* 5 *secunde. În primele* 10 *minute de funcţionare, de câte ori cele trei beculeţe sunt aprinse simultan?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă secunda zero este cea în care se aprinde prima dată primul beculeţ, atunci în secunda n sunt aprinse simultan toate beculeţele dacă şi numai dacă $n = M2 = M3+1 = M5+2$. Cel mai mic număr cu aceste proprietăţi este $n = 22$. Apoi, cum $n - 22 = M2 - 22 = M3 - 21 = M5 - 20$, deducem că $n - 22$ se divide simultan cu $2, 3$ şi 5, deci cu 30. Începând cu secunda 22, din 30 în 30 de secunde vor fi aprinse simultan toate beculeţele; în primele 10 minute de funcţionare, acest fapt se petrece de 20 ori.

Clasa a VII-a

VII.88. *Fie x, y, z numere reale distincte, iar $a = (x-y)(y-z)$, $b = (y-z)(z-x)$, $c = (z-x)(x-y)$. Să se arate că exact două dintre numerele a, b, c sunt negative, iar al treilea este pozitiv.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Să presupunem că $x < y < z$, celelalte situaţii discutându-se analog; atunci $x - y < 0, y - z < 0$, deci $a > 0; y - z < 0, z - x > 0$, deci $b < 0$, iar $z - x > 0, x - y < 0$, prin urmare $c < 0$.

VII.89. *Determinaţi cifrele x, y, z pentru care* $\sqrt{\overline{14xyzx5}} \in \mathbb{Q}$.

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Evident, trebuie ca $\overline{14xyzx5}$ să fie pătrat perfect; cum acest număr are ultima cifră 5, penultima cifră va fi 2, deci $x = 2$. Aplicând algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate pentru $\sqrt{\overline{142yz25}}$, obţinem că $1192^2 < \overline{142yz25} \leq 1195^2$ şi astfel numărul dorit va fi 1428025, prin urmare $y = 8, z = 0$.

VII.90. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $4^x = 5y + 4$.

Ion Vişan, Craiova

Soluţie. Nu putem avea $x < 0$, deoarece în acest caz $0 < 4^x < 1$, iar $5y + 4 \in \mathbb{Z}$, imposibil. Căutăm soluţii cu $x \in \mathbb{N}$; atunci $4^x = (5-1)^x = M5 + (-1)^x$ şi cum $4^x = 5y+4$, în mod necesar trebuie că x să fie impar. Pentru orice $x = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, avem $y = \dfrac{4(4^{2k}-1)}{5} \in \mathbb{Z}$, deoarece $4^{2k} - 1 = 16^k - 1 = M(16-1) = M5$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $\left(2k+1, \dfrac{4(4^{2k}-1)}{5}\right), k \in \mathbb{N}$.

VII.91. *Fie $a \in \mathbb{N}^*$, $a \leq 98$, iar $n = \dfrac{1}{a(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \dfrac{1}{98 \cdot 99}$. Demonstraţi că n nu poate fi pătratul unui număr raţional.*

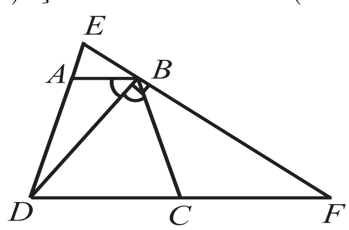
Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Cu procedeul uzual de calcul pentru sume telescopice, obţinem că $n = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{99} = \dfrac{99-a}{9 \cdot 11 \cdot a}$. Presupunem prin absurd că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$; atunci $\dfrac{99-a}{11 \cdot a}$ va fi pătratul unui număr raţional. Cum 11 este prim, avem fie că $11 | 99 - a$, fie că $a = 11b, b \in \mathbb{N}^*$. În oricare dintre situaţii, a va fi multiplu de 11, fie $a = 11k, k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, iar $\dfrac{99-a}{11a} = \dfrac{9-k}{11k}, k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Verificând fiecare dintre cele 8 situaţii, nu obţinem niciodată pătrat al unui număr raţional, de unde concluzia problemei.

VII.92. *În trapezul $ABCD$ cu baza mare $[CD]$, diagonala BD este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Perpendiculara în B pe diagonala BD intersectează dreapta AD în E. Să se arate că dreapta CE trece prin mijlocul laturii $[AB]$.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

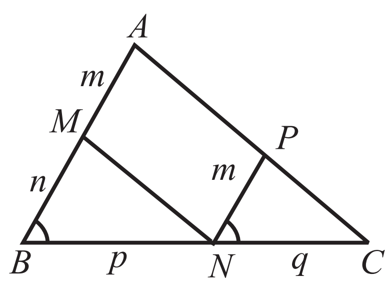
Soluţie. Din $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$ (alterne interne) şi $\widehat{ABD} \equiv \widehat{DBC}$ (BD bisectoare), deducem că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{BDC}$, prin urmare $BC = CD$. Dacă $\{F\} = BE \cap CD$, atunci $\widehat{CBF} \equiv \widehat{CFB}$ (au complementele congruente $\widehat{DBC}$, respectiv $\widehat{BDF}$, deci $BC = CF$. Astfel, C este mijlocul lui $[DF]$ şi mediana EC în $\triangle EDF$ va trece prin mijlocul segmentului $[AB]$ paralel cu baza.



VII.93. *Pe latura $[AB]$ a triunghiului ABC se consideră punctul M şi notăm $m = AM$, $n = BM$. Paralela prin M la AC taie BC în N, iar paralela prin N la AB taie AC în P. Fie $S_1 = \mathcal{A}_{BMN}$, $S_2 = \mathcal{A}_{CNP}$, $S = \mathcal{A}_{ABC}$, iar $x = \dfrac{m}{n}$. Să se exprime raportul $\dfrac{S_1 + S_2}{S}$ în funcţie de x şi să se afle x pentru care acest raport este minim.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Notăm $p = BN, q = CN$; atunci $S_1 = \dfrac{1}{2} np \sin \widehat{B}$, $S_2 = \dfrac{1}{2} mq \sin \widehat{PNC}$, $= \dfrac{1}{2} mq \sin \widehat{B}$, $S = \dfrac{1}{2}(m+n)(p+q) \sin \widehat{B}$, deci



$$\begin{aligned}
\frac{S_1 + S_2}{S} &= \frac{np + mq}{(m+n)(p+q)} \\
&= \frac{np + mq}{nq} : \frac{(m+n)(p+q)}{nq} \\
&= \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) : \left[\left(\frac{m}{n} + 1\right)\left(\frac{p}{q} + 1\right)\right] \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right) : \left[(x+1)\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Se demonstrează imediat că $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \geq \dfrac{1}{2}$, cu egalitate când $x = 1$, prin urmare valoarea minimă a raportului este $\dfrac{1}{2}$, atinsă când M este mijlocul laturii $[AB]$.

VII.94. *Determinaţi poligoanele regulate care au proprietatea că oricare trei vârfuri ale lor determină un triunghi isoscel.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat cu proprietatea din enunţ. Evident că $n = 3$ convine; fie $n \geq 4$. Cum $m(\widehat{A_1A_2}) = \dfrac{360^\circ}{n}$, $m(\widehat{A_2A_4}) = \dfrac{2\cdot 360^\circ}{n}$, atunci în $\triangle A_1A_2A_4$ vom avea $m(\widehat{A}_1) = \dfrac{360^\circ}{n}$, $m(\widehat{A}_4) = \dfrac{180^\circ}{n}$, iar $m(\widehat{A}_2) = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n}$. Este clar că $m(\widehat{A}_1) \neq m(\widehat{A}_4)$; putem avea $m(\widehat{A}_1) = m(\widehat{A}_2)$ când $\dfrac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 5$ şi $m(\widehat{A}_2) = m(\widehat{A}_4)$ când $\dfrac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \dfrac{540^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 4$. Se verifică uşor că pătratul şi pentagonul regulat au proprietatea cerută, ele adăugându-se astfel triunghiului echilateral.

Clasa a VIII-a

VIII.88. *Fie $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$, iar S_1 şi S_2 reprezintă suma elementelor lui A, respectiv suma pătratelor elementelor lui A. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_2 - 3\cdot|A| \geq S_1$.*

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Avem că $|A| = n$, $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, iar $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$. Atunci:

$$S_2 - 3\cdot|A| \geq S_1 \Leftrightarrow n(4n^2-1) - 9n \geq 3n^2 \Leftrightarrow n(n-10) \geq 0,$$

fapt care se întâmplă când $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$.

VIII.89. *Demonstraţi că $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \cdots + \sqrt{n^2+2n} < \dfrac{4n^2+2n+1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Obţinem imediat că $\sqrt{n^2+a} < n + \dfrac{a}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a > 0$; dând lui a valorile $1, 2, \ldots, 2n$ şi sumând inegalităţile obţinute, rezultă inegalitatea dorită.

VIII.90. *Demonstraţi că mulţimea $A = \left\{x \mid x = 27^{6n+2} + 3^{12n+5} + 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ nu conţine numere prime.*

Damian Marinescu, Târgovişte

Soluţie. Observăm că $x = (3^{6n+2})^3 + 3(3^{6n+2})^2 + 3\cdot 3^{6n+2} + 1 - 3\cdot 3^{6n+2} = (3^{6n+2}+1)^3 - 3^{6n+3} = (3^{6n+2} - 3^{2n+1} + 1)[(3^{6n+2}+1)^2 + 3^{2n+1}\cdot(3^{6n+2}+1) + 3^{4n+2}]$. Evident că ambii factori sunt diferiţi de 1 şi atunci x nu poate fi număr prim.

VIII.91. *Se consideră funcţia $f : \{1, 2, \ldots, 2008\} \to \mathbb{N}$ care asociază unui element n al domeniului, numărul divizorilor săi naturali.*

a) Determinaţi n pentru care $f(n) = 7$.

b) Aflaţi valoarea maximă a funcţiei.

c) Dacă $f(n) + f(m) + f(p) = 33$, arătaţi că măcar unul dintre numerele n, m sau p este pătrat perfect.

Monica Nedelcu, Iaşi

Soluţie. a) Dacă $f(n) = 7$, atunci $n = p^6$, cu p prim. Convin situaţiile $n = 2^6 = 64$ şi $n = 3^6 = 729$.

b) Utilizând formula care dă numărul de divizori ai unui număr natural şi făcând o analiză simplă, găsim valoarea maximă 40, atinsă pentru $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$.

c) Măcar unul dintre numerele $f(n), f(m)$ şi $f(p)$ va fi impar, iar un număr care are un număr impar de divizori va fi pătrat perfect.

VIII.92. *Să se arate că pentru orice număr întreg impar n, există numerele naturale a şi b astfel încât $a(a + 2n) = b(b + n)$.*

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluţie. Avem succesiv:

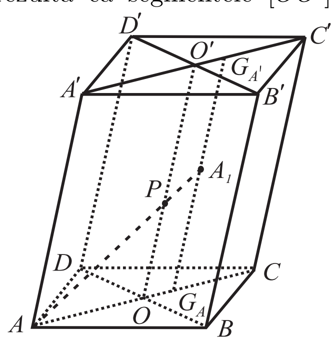
$$a(a + 2n) = b(b + n) \Leftrightarrow 4a^2 + 8an + 4n^2 - 4n^2 = 4b^2 + 4bn + n^2 - n^2$$
$$\Leftrightarrow (2a + 2n)^2 - (2b + n)^2 = 3n^2 \Leftrightarrow (2a - 2b + n)(2a + 2b + 3n) = 3n^2.$$

Cum avem libertatea de a căuta a şi b, încercăm să avem $2a + 2b + 3n = 3n^2$, $2a - 2b + n = 1$; găsim atunci $a = \frac{1}{4}(3n^2 - 4n + 1)$, $b = \frac{1}{4}(3n^2 - 2n - 1)$. Ar mai trebui să avem a, b numere naturale; însă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ şi astfel $a = 3k^2 + k \in \mathbb{Z}$, $b = 3k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Observăm şi că numerele $a = k(3k + 1)$ şi $b = k(3k + 2)$ sunt pozitive pentru $k \in \mathbb{Z}$, ceea ce încheie rezolvarea problemei.

VIII.93. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped oarecare şi O, O' punctele de intersecţie a diagonalelor bazelor. Se notează cu G_A şi $G_{A'}$ centrele de greutate ale $\triangle BCD$ şi, respectiv, $\triangle B'C'D'$ şi cu A_1 mijlocul segmentului $[G_AG_{A'}]$. Notaţiile G_B, $G_{B'}$ şi B_1 etc. se introduc în mod similar. Arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sunt concurente într-un punct P situat pe OO' şi precizaţi poziţia lui P pe $[OO']$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Din $O, G_A \in AC$ şi $O', G_{A'} \in A'C'$ rezultă că segmentele $[OO']$ şi $[G_AG_{A'}]$ aparţin planului $ACC'A'$. Se constată uşor că aceste segmente sunt paralele şi egale. Ca urmare, există $\{P\} = AA_1 \cap OO'$. Din $\triangle AOP \sim \triangle AG_AA_1$ şi faptul că $AG_A = AO + OG_A = AO + \frac{1}{3}AO = \frac{4}{3}AO$, avem



$$\frac{OP}{G_AA_1} = \frac{AO}{AG_A} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow OP = \frac{3}{4}G_AA_1 \Leftrightarrow OP = \frac{3}{8}OO' \qquad (*)$$

ceea ce precizează poziţia lui P pe OO'.

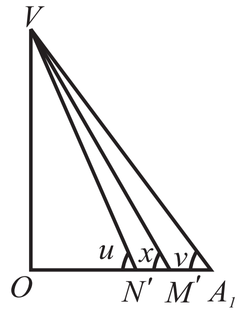
În mod analog se arată că BB_1, CC_1 şi DD_1 intersectează OO' în acelaşi punct P precizat de $(*)$.

Notă. Problema se poate uşor extinde la cazul în care A_1 împarte $[G_A G_{A'}]$ în raportul $k \neq \dfrac{1}{2}$ şi analog pentru B_1, C_1, D_1.

VIII.94. *Fie $VA_1A_2\ldots A_n$ o piramidă regulată; notăm cu $\mathcal{P}$ poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ şi fie $U = \left\{m(\widehat{VM,(A_1A_2A_3)}) \mid M \in \mathcal{P}\right\}$. Demonstraţi că $\max U < 2\min U$.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Evident că $m(\widehat{VM,(A_1A_2A_3)}) = m(\widehat{VMO})$, unde O este centrul lui $\mathcal{P}$. Din considerente de simetrie, este suficient să luăm M pe segmentul $[A_1N]$, unde N este mijlocul lui $[A_1A_2]$. Fie N' şi M' pe $[OA_1]$ astfel încât $ON' = ON$, $OM' = OM$; din congruenţe imediate de triunghiuri, avem că $\widehat{VN'O} \equiv \widehat{VNO}$, $\widehat{VM'O} \equiv \widehat{VMO}$. Notăm $u = m(\widehat{VN'O})$, $v = m(\widehat{VA_1O})$ şi se arată imediat că $M' \in [N'A_1]$, prin urmare $u = \max\mathcal{U}$, $v = \min\mathcal{U}$.



Rămâne să demonstrăm că $u < 2v$; cum $u = v + m(\widehat{N'VA_1})$, ar trebui să avem $m(\widehat{N'VA_1}) < v$, adică $N'A_1 < N'V(*)$. Notăm $R = OA_1$, $a = ON$, $h = VO$ şi se vede uşor că $a = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$, $N'A_1 = R - a = R(1 - \cos\dfrac{180^\circ}{n})$, iar $N'V = \sqrt{h^2 + a^2}$. Atunci:

$$(*) \quad \Leftrightarrow R^2\left(1 - \cos\frac{180^\circ}{n}\right)^2 < h^2 + a^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R^2\cos\frac{180^\circ}{n} + R^2\cos^2\frac{180^2}{n}$$

$$< h^2 + R^2\cos^2\frac{180^\circ}{n} \Leftrightarrow h^2 > R^2\left(1 - 2\cos\frac{180^\circ}{n}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{h}{R}\right)^2 > 1 - 2\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Aceasta din urmă inegalitate este adevărată pentru $n \geq 3$, întrucât membrul stâng este pozitiv, iar cel drept negativ.

Clasa a IX-a

IX.86. *Fie O mijlocul ipotenuzei $[BC]$ a triunghiului dreptunghic ABC, r raza cercului înscris, iar R_1 şi R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, respectiv AOC. Să se demonstreze că $\sqrt{R_1R_2} \geq \dfrac{a^2}{2a + 4r}$.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Utilizând formulele uzuale, avem că $r = \dfrac{bc}{a+b+c}$, $R_1 = \dfrac{a^2}{4b}$, $R_2 = \dfrac{a^2}{4c}$. Cum $a + 2r = a + \dfrac{2bc}{a+b+c} = \dfrac{a^2 + 2bc + a(b+c)}{a+b+c} = \dfrac{(b+c)(a+b+c)}{a+b+c} = b + c$, inegalitatea de demonstrat revine la $\dfrac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2(b+c)} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0$, evident adevărată. Egalitatea se atinge pentru $b = c$, deci când $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel.

IX.87. *Demonstraţi că într-un triunghi ascuţitunghic, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{b^4 + c^4} + \frac{b}{c^4 + a^4} + \frac{c}{a^4 + b^4} < \frac{3}{4Rrp}.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Pentru $x, y > 0$, avem succesiv:

$$(x-y)^2(x^2+y^2+xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+xy) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4 \geq x^3y+xy^3 \Leftrightarrow \frac{x^4+y^4}{xy} \geq x^2+y^2.$$

Aplicând această inegalitate pentru laturile unui triunghi ascuţitunghic, obţinem:

$$\frac{a^4+b^4}{ab} \geq a^2+b^2 > a^2+b^2-2ab\cos C = c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^4+b^4}{abc} > c \Leftrightarrow \frac{a^4+b^4}{c} > abc \Leftrightarrow \frac{c}{a^4+b^4} < \frac{1}{abc}.$$

Considerând relaţiile analoage şi sumându-le, obţinem concluzia dacă observăm că $abc = 4SR = 4Rrp$.

IX.88. *Demonstraţi că* $15 \cdot 25^n + 32 \cdot n^2 + 120n - 15 \,\vdots\, 128$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Notând $A_n = 15 \cdot 25^n + 32n^2 + 120n - 15$, vom arăta că $A_n \vdots 128$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prin inducţie matematică. Avem că $A_0 = 0 \vdots 128$; presupunem că $A_k \vdots 128$ şi să demonstrăm că $A_{k+1} \vdots 128$. Cum $A_{k+1} = A_k + 360 \cdot 25^k + 64k + 152$, $360 = 256 + 104$ şi $152 = 182 + 24$, rămâne să arătăm că $104 \cdot 25^k + 64k + 24 \vdots 128$, ceea ce revine la faptul că $B_k = 13 \cdot 25^k + 8k + 3 \vdots 16$. Această din urmă afirmaţie se probează uşor printr-o nouă inducţie matematică.

IX.89. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc inegalitatea*

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)^2}\right) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Din inegalitatea mediilor obţinem că

$$2\sqrt{2} \cdot (3k-1)^2 = 2 \cdot (3k-1) \cdot \sqrt{1 \cdot (3k-1)} \cdot \sqrt{2(3k-1)}$$
$$< 2(3k-1) \cdot \frac{1+3k-1}{2} \cdot \frac{2+3k-1}{2} = \frac{(3k-1) \cdot 3k \cdot (3k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitatea fiind strictă deoarece nu putem avea simultan $3k-1=1$ şi $3k-1=2$. Rezultă că $\frac{1}{2\sqrt{2}(3k-1)^2} > \frac{2}{(3k-1)3k \cdot (3k+1)} = \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} + \frac{1}{3k+1} = \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k}$. Dând valori lui k şi sumând inegalităţile obţinute, găsim tocmai inegalitatea dorită.

IX.90. *Să se determine toate şirurile de numere reale* $(a_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietatea că* $a_{n+m} + a_{n-m} = a_{3n} + n$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

I. V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm $b_n = a_n + n$, relaţia din enunţ se scrie sub forma $b_{n+m} + b_{n-m} = b_{3n}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Pentru $n = m = 0$, obţinem că $b_0 = 0$. Pentru $n = m$, deducem că $b_{2n} = b_{3n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Luând acum $m = 0$, găsim că $2b_n = b_{3n}, \forall n \in \mathbb{N}(1)$, de unde $b_{2n} = 2b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. În sfârşit, facem $n = 2m$ şi rezultă că $b_{3m} + b_m = b_{6m} = b_{2\cdot 3m} = 2b_{3m}, \forall m \in \mathbb{N}$, prin urmare $b_m = b_{3m}$, $\forall m \in \mathbb{N}(2)$. Din (1) şi (2) obţinem că $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $a_n = -n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Clasa a X-a

X.86. *Aflaţi* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *pentru care* $\lg^2 \dfrac{x}{y} = 3 \lg \dfrac{x}{3} \lg \dfrac{3}{y}$.

A. V. Mihai, Bucureşti

Soluţie. Ecuaţia se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&\lg^2 x - 2 \lg x \lg y + \lg^2 y + 3(\lg x \lg y - \lg x \lg 3 - \lg 3 \lg y + \lg^2 3) = 0\\
&\Leftrightarrow (\lg x - \lg 3)^2 + (\lg y - \lg 3)^2 + (\lg x + \lg y - 2 \lg 3)^2 = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \lg x = \lg y = \lg 3 \Leftrightarrow x = y = 3.
\end{aligned}$$

X.87. *Fie* $A \subset \mathbb{N}$ *şi* $f : A \to A$ *o funcţie injectivă; notăm* $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ funcţii}}$. *Determinaţi* f, *ştiind că există* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *numere prime între ele astfel încât* $f_p(x) + f_q(x) = 2x$, $\forall x \in A$.

Romeo Ilie, Braşov

Soluţie. Fie $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Avem că $f_p(x_1) \geq x_1$, $f_q(x_1) \geq x_1$ şi, cum $f_p(x_1) + f_q(x_1) = 2x_1$, înseamnă că $f_p(x_1) = f_q(x_1) = x_1$. Inductiv se demonstrează că $f_p(x_k) = f_q(x_k) = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (folosim faptul că f_p şi f_q sunt funcţii injective), prin urmare $f_p(x) = f_q(x) = x$, $\forall x \in A$. Din $f(f_{p-1}(x)) = x, \forall x \in A$, deducem că f este surjectivă, deci bijectivă.

Ştim că $(p, q) = 1$; atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ pentru care $up + vq = 1$ şi astfel $f(x) = f_{up+vq}(x) = (f_{up} \circ f_{vq})(x) = x$, $\forall x \in A$ (unde $f_k = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{-k \text{ funcţii}}$, pentru $k \in \mathbb{Z}, k < 0$). În concluzie, există o singură funcţie cu proprietatea dată, anume funcţia identică.

X.88. *Fie* $ABCD$ *un paralelogram, iar* M *şi* N *mijloacele laturilor* (BC), *respectiv* (CD). *Dacă* $AM = BN$ *şi* $AM \perp BN$, *arătaţi că* $ABCD$ *este pătrat.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a = AB, b = AD$; deoarece $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AD} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ şi $AM \perp BN$, obţinem că $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{3}(a^2 - b^2)$. Apoi, cum $AM = BN$, vom avea că $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BN}^2$, de unde $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{8}(b^2 - a^2)$. Rezultă că $\dfrac{2}{3}(a^2 - b^2) = \dfrac{3}{8}(b^2 - a^2)$, deci $a = b$ şi apoi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Astfel, $ABCD$ va fi un pătrat.

Dl. **Titu Zvonaru**, Comăneşti, observă că ipoteza poate fi slăbită, în sensul că este suficient ca punctele M şi N să împartă laturile $[BC]$, respectiv $[CD]$, într-un acelaşi raport, adică $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{CN}{ND}$. Domnia sa oferă o demonstraţie analitică, însă poate fi uşor adaptată şi soluţia de mai sus.

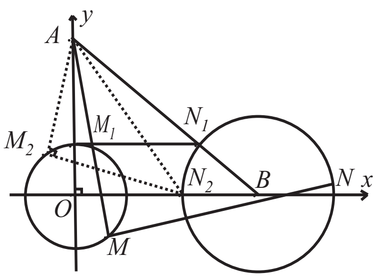
X.89. *În planul complex se consideră punctele $A(3i)$, $B(4)$, iar M este un punct variabil de modul 1.*

a) Determinaţi locul geometric al punctului N cu proprietatea că triunghiurile AOB şi AMN sunt asemenea şi la fel orientate.

b) Găsiţi punctele N_1, N_2 ale locului ce se plasează pe segmentele $[BA]$, respectiv $[BO]$, precum şi punctele M_1, M_2 din care provin.

Dan Brânzei, Iaşi

Soluţie. a) Asemănarea revine la condiţia $\dfrac{z_N-z_A}{z_N-z_M}=\dfrac{z_B-z_A}{z_B}$, care se rescrie $3z_N=12+(3+4i)z_M(*)\Leftrightarrow 3(z_N-z_B)=(3+4i)z_M$. Trecând la module în această relaţie, deducem că $3NB=5$ şi aceasta este singura condiţie pentru N, deoarece egalarea argumentelor conduce la argumentul variabil al lui M. În concluzie, locul geometric cerut este cercul $\mathcal{C}\left(B,\dfrac{5}{3}\right)$.



b) Punctul N_1 este pe paralela prin M_1 la OB, unde M_1 este punctul în care OA taie cercul unitate; găsim $z_{M_1}=i, z_{N_1}=\dfrac{8}{3}+i$. Dacă $z_{M_2}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ şi N_2 este punctul de pe Ox corespunzător, anulând partea imaginară a lui z_{N_2} în (*) obţinem condiţia $4\cos\alpha+3\sin\alpha=0$, deci $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$ şi pentru un astfel de α găsim $z_{N_2}=\dfrac{7}{3}$.

X.90. *Fie X_1, X_2, …, X_n variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele luând valorile -1 şi 1 cu probabilităţile p, respectiv q. Considerăm $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$.*

a) Să se calculeze media şi dispersia lui Y.

b) Să se precizeze care este valoarea luată de Y cu probabilitate maximă.

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. a) Notăm cu Z numărul de variabile X_i (din suma care defineşte Y) care primesc valoarea -1; atunci $Y=n-2Z$. Deoarece $P(Z=k)=C_n^k\cdot p^p\cdot q^{n-k}$, $k=\overline{0,n}$, variabila aleatoare Z are media $M(Z)=np$ şi dispersia $D(Z)=npq$, prin urmare $M(Y)=n-2np$, iar $D(Y)=4npq$.

b) Avem că $P(Y=n-2k)=P(Z=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$. Acest număr este maxim pentru $k\in[np-q,np+q]$. Valoarea cea mai probabilă a lui Y este $n-2k_0$, unde $k_0=[np-q]+1$, dacă $np-q\notin\mathbb{N}$ şi $k_0\in\{np-q,np+q\}$ pentru $np-q\in\mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

XI.86. *Fie $n\in 2\mathbb{N}^*$ şi $A\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$; arătaţi că numerele* $\det\left(A^{n+1}-I_m\right)$ *şi* $\det(A-I_m)$ *au acelaşi semn.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Are loc egalitatea

$$A^{n+1} - I_m = (A - I_m)(A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I_m).$$

Fie $n = 2p$, iar $\varepsilon_1, \overline{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \overline{\varepsilon}_2, \ldots, \varepsilon_p, \overline{\varepsilon}_p$ rădăcinile complexe nereale de ordin $n+1$ ale unităţii: atunci $A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I_m = \prod_{i=1}^{p}(A - \varepsilon_i I_m)(\overline{A - \varepsilon_i I_m})$. Cum $\det(B \cdot \overline{B}) = \det B \cdot \det \overline{B} = \det B \cdot \overline{\det B} = |\det B|^2 \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, rezultă că $\det(A^n + A^{n-1} + \ldots + I_m) \geq 0$ şi atunci $\det(A^{n+1} - I_m)$ şi $\det(A - I_m)$ au acelaşi semn.

XI.87. *Studiaţi convergenţa şirurilor* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$, *unde*

$$a_n = \frac{2008 + \cos\sqrt{n}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}, \quad b_n = \frac{2009 + \cos\sqrt{n}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Vom arăta că a_n converge spre 1, în timp ce b_n este un şir fără limită. Avem:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{\cos\sqrt{n} - \cos\sqrt{n+1}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}} = 1 + \frac{2\sin\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}} = \\ &= 1 + \frac{\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}}{\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{2\sin\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Al doilea factor al produsului tinde către 0, primul către 1, iar al treilea este mărginit; deducem că limita produsului este 0, deci $a_n \to 1$.

Observăm apoi că $b_n = a_n + \dfrac{1}{2008 + \cos\sqrt{n+1}}$ şi cum al doilea termen la sumei nu are limită, rezultă că b_n este şir divergent.

XI.88. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin:* $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_{n+1} = 2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Studiaţi existenţa limitelor* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fixăm $a \in \left(x_1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi definim $f : [0, a] \to [0, 2\operatorname{tg} a - a]$, $f(t) = 2\operatorname{tg} t - t$; evident că f este bijectivă şi strict crescătoare şi are loc inegalitatea $f^{-1}(a) < a$ (aceasta fiind echivalentă cu $f(a) > a \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} a > 2a$, adevărată pentru $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Observăm că $x_n = f(x_{n+1})$ şi prin inducţie se arată că $x_n \in (0, a), \forall n \geq 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir mărginit. Apoi, aceeaşi inegalitate $\operatorname{tg} u > u, u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, impune că $x_{n+1} > 2x_{n+1} - x_n$, de unde $x_{n+1} < x_n, \forall n \geq 1$. Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ va fi convergent şi trecând la limită în relaţia de recurenţă găsim că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Considerăm şirul $\dfrac{1}{nx_n} = \dfrac{\frac{1}{x_n}}{n}$, $n \geq 1$, şi îi aplicăm criteriul Stolz-Cesàro:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_{n+1}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{tg} x_{n+1} - 2x_{n+1}}{x_{n+1}(2\operatorname{tg} x_{n+1} - x_{n+1})}.\end{aligned}$$

Cum $\dfrac{1}{x_{n+1}} > \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$ şi $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg} t - 2t}{t(2\operatorname{tg} t - t)} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nx_n} = 0$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = +\infty$.

XI.89. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^2\sin 1} + \dfrac{1}{2^2\sin\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n^2\sin\frac{1}{n}}\right)$.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţia autorului. Mai general, vom demonstra următoarea

Propoziţie. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât există $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ şir strict monoton şi nemărginit cu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n(a_{n+1}-a_n)}{b_{n+1}-b_n} = L \in \mathbb{R}^*$. Atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton de la un rang încolo şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \cdot (sgnL)$.*

Într-adevăr, vom avea că $\dfrac{b_n}{b_{n+1}-b_n} > 0$ de la un rang încolo; cum $L \neq 0$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ va fi strict monoton începând cu acel rang, ceea ce arată şi existenţa limitei $L' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Vom aplica Stolz-Cesàro pentru $a_n = \dfrac{a_n b_n}{b_n}$: dacă există $L'' = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, unde $d_n = \dfrac{a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n}{b_{n+1}-b_n}$, atunci $L'' = L'$. Însă

$$d_n = \frac{a_{n+1}(b_{n+1}-b_n) + b_n(a_{n+1}-a_n)}{b_{n+1}-b_n} = a_{n+1} + \frac{b_n(a_{n+1}-a_n)}{b_{n+1}-b_n},$$

ceea ce justifică existenţa lui L''; în plus, vom avea că $L' = L' + L$, egalitate ce nu poate avea loc decât dacă $L' = \pm\infty$. În concluzie, $L' = +\infty \cdot (\operatorname{sgn} L)$.

Revenim la problemă: dacă (a_n) este şirul din enunţ, iar $b_n = n^2$, obţinem că $\dfrac{b_n(a_{n+1}-a_n)}{b_{n+1}-b_n} = \dfrac{n^2}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2\sin\frac{1}{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$. Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

XI.90. *Există funcţii polinomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să aibă exact n puncte fixe distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi astfel încât pentru fiecare $1 \leq j \leq n$, ecuaţia $p(x) = a_j$ să aibă soluţie reală unică?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Există astfel de funcţii pentru n impar şi nu există pentru n par.

Pentru $n = 1$, un exemplu ar fi $p(x) = a_1 + \alpha(x - a_1)$, cu $\alpha \neq 0$; să considerăm $n \geq 3$ impar. Pentru $j \in \{1, \ldots, n\}$ oarecare, fie m_j valoarea minimă a funcţiei $q_j(x) =$

$\prod_{i\neq j}(x-a_i)$ şi fie k un număr real pozitiv fixat astfel încât $k < -\dfrac{1}{m_j}$, $\forall j = \overline{1,n}$ (se vede uşor că fiecare m_j există şi este negativ deoarece funcţia ia şi valori negative). Arătăm că funcţia polinomială definită prin $p(x) = x + k(x-a_1)\dots(x-a_n)$ are proprietăţile cerute. Faptul că $p(a_j) = a_j, j = \overline{1,n}$, este imediat. Apoi, dacă presupunem că există j şi un $b \neq a_j$ astfel ca $p(b) = a_j$, obţinem că $(b-a_j)(1+kq_j(b)) = 0$, deci $1 + kq_j(b) = 0$, ceea ce conduce la contradicţia $0 = 1 + k\cdot q_j(b) \geq 1 + km_j > 0$.

Fie acum n par şi să presupunem că $a_1, \dots, a_n$ sunt singurele puncte fixe ale funcţiei polinomiale p. Trebuie să avem $p(x) - x = f(x)(x-a_1)\dots(x-a_n)$, cu f funcţie polinomială de grad par (întrucât nu are zerouri reale); atunci şi p va avea gradul par, deci limitele sale spre $+\infty$ şi $-\infty$ vor fi ambele $+\infty$ sau ambele $-\infty$. Tratăm doar primul caz, al doilea fiind analog. Să zicem că $a_1 < a_2 < \dots < a_n$; atunci ecuaţia $p(x) = a_n$ va avea sigur o soluţie în intervalul $(-\infty, a_1)$, deoarece $\lim\limits_{n\to-\infty}(p(x)-a_n) = +\infty$ şi $p(a_1) - a_n = a_1 - a_n < 0$. Această soluţie este clar diferită de a_n, astfel că p nu îndeplineşte toate condiţiile enunţului în acest caz.

Clasa a XII-a

XII.86. *Fie $c\in\mathbb{R}^*$, iar $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ funcţii continue astfel încât $f(a+b-x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Să se determine $y \in [a,b]$ pentru care*

$$\int_a^b \frac{[f(x)]^{g(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}}dx = c\int_y^{a+b-y} \frac{[g(x)]^{f(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}}dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $a + b - x = t$, obţinem că

$$I = \int_a^b \frac{[f(x)]^{g(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}}dx = \int_a^b \frac{[g(x)]^{f(x)}}{[f(x)]^{g(x)} + [g(x)]^{f(x)}}dx.$$

Adunând cele două integrale, deducem că $2I = \int_a^b dx = b - a$, deci $I = \dfrac{b-a}{2}$. Analog, notând cu J integrala din membrul drept al relaţiei din enunţ, vom găsi că $J = \dfrac{a+b}{2} - y$. Din egalarea lui I cu J aflăm $y = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2c}$.

XII.87. *a) Fie $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, astfel încât $f(a) = 0$. Să se arate că $\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \dfrac{a^3}{3}\int_0^a [f'(t)]^2\,dt$. Pentru ce funcţii se realizează egalitatea?*

b) Fie $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f'(a) = 0$. Să se arate că $\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \leq \dfrac{a^5}{20}\int_0^a (f''(t))^2\,dt$. Pentru ce funcţii se realizează egalitatea?

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. a) Folosim formula de integrare prin părţi şi inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\int_0^a tf'(t)dt &= tf(t)\Big|_0^a - \int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt \\ &\Rightarrow (\int_0^a f(t)dt)^2 = (\int_0^a tf'(t)dt)^2 \leq \int_0^a t^2dt\cdot\int_0^a [f'(t)]^2dt,\end{aligned}$$

de unde inegalitatea dorită. Egalitatea se atinge dacă $f'(t) = \lambda t$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$, deci pentru $f(t) = \dfrac{\lambda}{2}t^2 + C$. Cum $f(a) = 0$, obţinem că $f(t) = \dfrac{\lambda}{2}(t^2 - a^2)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară.

b) Procedăm întru totul analog: vom avea că $\displaystyle\int_0^a t^2 f''(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ (două integrări prin părţi), apoi aplicăm Cauchy-Schwarz şi rezultă inegalitatea dorită. Vom avea egalitate când $f''(t) = \lambda t^2$ şi $f(a) = f'(a) = 0$, deci pentru $f(t) = \dfrac{\lambda}{12}(t^4 - 4a^3 t + 3a^4)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară.

XII.88. *Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se afle limita sa, unde* $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 - n^2}{n^2} \ln \dfrac{k+n}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este şirul sumelor Riemann asociat funcţiei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, diviziunii cu puncte echidistante $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n} < \ldots < \dfrac{n}{n}$ şi sistemului de puncte intermediare $\dfrac{k}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Evident, avem de-a face cu o integrală improprie, despre care vom arăta însă că este convergentă şi îi vom calcula valoarea:

$$\int_0^1 (x^2 - 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\cdot \frac{-1}{x(x+1)}dx$$
$$= -\frac{2}{3}\ln 2 - A + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{x+1}dx = -\frac{2}{3}\ln 2 - A + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - x - 2\ln(x+1)\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{6} - A - \frac{4}{3}\ln 2,$$

unde

$$A = \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{3[\ln(x+1) - \ln x]}{\dfrac{1}{x^3 - 3x^2}} = \lim_{x\searrow 0}\frac{3\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{-3x^2 + 6x}{x^4(x-3)^2}}$$
$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{x^2(x-3)^2}{(x+1)(x-2)} = 0.$$

În concluzie, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent spre $-\dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{3}\ln 2$.

XII.89. *Să se arate că polinomul $f = 200X^5 + 196X^4 - 49X^3 + 35X^2 + 14X + 63$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Vom folosi criteriul de ireductibilitate al lui Eisenstein şi teorema lui Gauss. Într-adevăr, numărul prim 7 divide $63, 14, 35, -49$ şi 196; 7 nu divide 200, iar 7^2 nu divide 63. Deducem (Eisenstein) că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$, de unde (Gauss) f va fi ireductibil şi peste $\mathbb{Q}$.

XII.90. *Fie $\mathbb{H}$ corpul cuaternionilor, iar $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ unităţile cuaternionice ($\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$). Definim*

$$\mathbb{K} = \left\{ a + \frac{b + c\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{b\sqrt{3} - c + 2d\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j} + \frac{3b - c\sqrt{3} - 2d}{4}\boldsymbol{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

pe care considerăm operaţiile uzuale între cuaternioni. Să se arate că în acest mod obţinem un corp necomutativ, izomorf cu corpul cuaternionilor.

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Notăm $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j} + \frac{3}{4}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$. Se verifică prin calcul că $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{w}^2 = -1$, $\boldsymbol{uv} = -\boldsymbol{vu} = \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{vw} = -\boldsymbol{wv} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{wu} = -\boldsymbol{uw} = \boldsymbol{v}$, iar orice element al lui $\mathbb{K}$ se scrie sub forma $a + b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$. Funcţia $f : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$, $f(a + b\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}) = a + b\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ este bijectivă şi realizează un transport de structură între $\mathbb{H}$ şi $\mathbb{K}$, de unde concluzia.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.