Concursul omagial "Recreaţii Ştiinţifice"

Rezultatul concursului

Amintim punctajul pe baza căruia s-au acordat premiile:
- fiecare problemă este notată maxim cu 10 puncte;
- se acordă câte 2 puncte în plus pentru alte soluţii, generalizări etc.;
- se depunctează soluţiile incomplete sau redactate neîngrijit.

A treia problemă a concursului a apărut enunţată în nr. 2/2008, p.182, cu o greşeală de tipărire în formula de stabilit; formula corectă este

$$\mathrm{tg}\widehat{IOI'} = \frac{2\left|\sin B - \sin C\right|}{2\cos A - 1},$$

cum este dată în *Recreaţii Ştiinţifice*, t.VI(1888), p.96, şi nu cu numitorul $2\cos B - 1$, cum apare în locul menţionat.

Ca urmare, această problemă a fost retrasă, în concurs rămânând numai patru probleme. Ne cerem scuze pentru acest incident regretabil.

Doi concurenţi au îndeplinit condiţiile de premiere:
- **CĂPĂŢÂNĂ Roxana**, cl. a IX-a, Colegiul Naţional din Iaşi;
- **TIBA Marius**, cl. a X-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti,

amândoi cu acelaşi punctaj: 38 puncte din 40 posibile.

Comisia de concurs a hotărât ca, în această situaţie de egalitate a punctajului obţinut, să acorde **premiul I** acestor concurenţi (iniţial era prevăzut un singur premiu I). Premiul I constă dintr-o **diplomă** şi suma de **200 lei.**

Rezolvarea problemelor

1. *Ion şi Constantin merg la cumpărături cu soţiile lor, Maria şi Elena. Fiecare din aceste patru persoane cumpără un număr de obiecte ce le plăteşte pe fiecare cu atâţia lei câte obiecte a cumpărat. Ion cumpără nouă obiecte mai mult decât Elena şi fiecare soţ cheltuieşte cu 21 lei mai mult decât soţia sa. Care este soţia lui Ion şi care este a lui Constantin? Care este numărul de obiecte cumpărate de fiecare dintre aceste persoane? Care este suma cheltuită de fiecare dintre ele?*

Recreaţii Ştiinţifice, I(1883)-*Problema 50,* p.279

Soluţie (*ibidem*, p.279). Notăm cu x numărul obiectelor cumpărate de un bărbat şi cu y cel cumpărat de soţia lui. Din enunţul problemei rezultă că

$$x^2 - y^2 = 21 \quad \text{sau} \quad (x+y)(x-y) = 21,$$

ecuaţie echivalentă cu următoarele două sisteme:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Primul sistem are soluţia $x = 5$, $y = 2$, iar al doilea $x = 11$, $y = 10$. Aşadar, un bărbat a cumpărat 5 obiecte şi celălalt 11 obiecte, iar o femeie a cumpărat 2 şi cealaltă 10.

Cum, din enunţ, Ion cumpără 9 obiecte mai mult decât Elena, rezultă că Ion cumpără 11 obiecte, Elena 2 obiecte, Constantin 5 şi Maria 10.

Ca urmare, Ion a cheltuit $11^2 = 121$ lei, Constantin $5^2 = 25$ lei, Elena $2^2 = 4$ lei şi Maria $10^2 = 100$ lei.

În sfârşit, din condiţiile problemei deducem că Maria este soţia lui Ion şi Elena a lui Constantin.

2. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$\begin{aligned}&(x+2y)\,(x+2z)=a,\\&(y+2x)\,(y+2z)=b,\\&(z+2x)\,(z+2y)=c\qquad(0<a<b<c)\,.\end{aligned}$$

Recreaţii ştiinţifice, IV(1886)-*Problema 209,* p.144

Soluţie (*Recreaţii Ştiinţifice*, t.V, p.18 – schiţă de soluţie). Utilizând identitatea $mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ şi notând $t=(x+y+z)^2$, putem scrie sistemul în forma

$$\begin{cases}t-(y-z)^2=a\\t-(z-x)^2=b\\t-(x-y)^2=c\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}|y-z|=\sqrt{t-a}\\|z-x|=\sqrt{t-b}\\|x-y|=\sqrt{t-c},\end{cases}$$

cu $t>c$ ($t=c$ ar implica $a=b$). Explicitarea valorilor absolute conduce la opt cazuri (+ inseamnă că expresia "dintre bare" rămâne neschimbată, iar − spune că aceasta se ia cu semn schimbat):

$$I\begin{cases}+\\+\\+\end{cases},II\begin{cases}+\\+\\-\end{cases},III\begin{cases}+\\-\\+\end{cases},IV\begin{cases}+\\-\\-\end{cases},V\begin{cases}-\\+\\+\end{cases},VI\begin{cases}-\\+\\-\end{cases},VII\begin{cases}-\\-\\+\end{cases},VIII\begin{cases}-\\-\\-\end{cases}.$$

Cazurile I şi VIII. Adunând cele trei ecuaţii, suntem conduşi la ecuaţia în t

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}=0,\quad t>c,$$

care nu are soluţii pe mulţimea $t>c$. Ca urmare, sistemele I şi VIII nu au soluţii.

Cazurile II şi VII. În acelaşi mod, obţinem ecuaţia

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}=\sqrt{t-c},\quad t>c,$$

care nu are soluţii, căci, din $0<a<b<c$, avem $\sqrt{t-c}<\sqrt{t-a}$.

Cazurile III şi VI. Se obţine ecuaţia

$$\sqrt{t-a}+\sqrt{t-c}=\sqrt{t-b},\quad t>c,$$

şi, ca în cazul precedent, se consată că nu avem soluţii.

Cazurile IV şi V. Obţinem, pe mulţimea $t>c$, ecuaţia

$$\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}=\sqrt{t-a}\quad\text{sau}\quad 2\sqrt{t-b}-\sqrt{t-c}=b+c-a-t,$$

care, pentru t verificând condiţiile $c<t<b+c-a$, este echivalentă cu

$$4(t-b)(t-c)=t^2-2(b+c-a)t+(b+c-a)^2$$

sau

$$3t^2-2(a+b+c)t+4bc-(b+c-a)^2=0$$

(menţionăm că nu putem avea $t=b+c-a$ fără a fi în contradicţie cu $0<a<b<c$). Această ecuaţie de gradul al doilea are rădăcinile

$$t_\pm = \frac{1}{3}[(a+b+c) \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}].$$

Vom vedea că numai t_+ verifică condiţiile $c < t < b+c-a$. Într-adevăr, avem

$$t_\pm > c \iff \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} > 2c-a-b$$

şi, cum $2c-a-b > 0$, urmează că rădăcina t_- trebuie exclusă. În privinţa lui t_+, ridicând la pătrat şi operând reduceri, obţinem $a^2+b^2 > 2ab$, care este adevărată, căci $a < b$. Deci $t_+ > c$ şi rămâne de văzut că are loc şi inegalitatea $t_+ < b+c-a$: $t_+ < b+c-a \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} < b+c-2a \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (b-a)(c-a) > 0$, ceea ce este adevărat.

Să revenim la rezolvarea sistemelor IV şi V, adică

$$IV \begin{cases} y-z = \sqrt{t-a} \\ z-x = -\sqrt{t-b} \\ x-y = -\sqrt{t-c} \end{cases} \quad \text{şi} \quad V \begin{cases} y-z = -\sqrt{t-a} \\ z-x = \sqrt{t-b} \\ x-y = \sqrt{t-c}, \end{cases}$$

cu $3t = (a+b+c) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$.

Mai întâi, amintindu-ne că am notat $(x+y+z)^2 = t$, deducem că $x+y+z = \pm\sqrt{t}$. Pentru a rezolva sistemul IV procedăm astfel: aflăm x înlocuind în această ultimă egalitate pe y şi z daţi de ultimele două ecuaţii ale sistemului IV, iar y şi z se găsesc în mod similar; obţinem următoarele două soluţii:

$3x = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-b}-\sqrt{t-c}$, $3y = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-a}+\sqrt{t-c}$, $3z = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-a}-\sqrt{t-b}$.

Analog, sistemul V are soluţiile:

$3x = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-b}+\sqrt{t-c}$, $3y = \pm\sqrt{t}-\sqrt{t-a}-\sqrt{t-c}$, $3z = \pm\sqrt{t}+\sqrt{t-a}+\sqrt{t-b}$,

cu $3t = (a+b+c) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$.

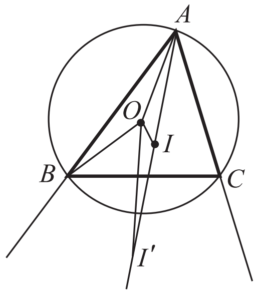
În concluzie, sistemul dat are patru soluţii, două câte două opuse (adică, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluţie, atunci şi $(-x_0, -y_0, -z_0)$ este soluţie a sistemului).

3. *Fie O, I, I' centrele cercului circumscris triunghiului ABC, cercului înscris acestuia şi, respectiv, al cercului exînscris tangent laturii BC. Să se demonstreze că*

$$\mathrm{tg}\widehat{IOI'} = \frac{2\,|\sin B - \sin C|}{2\cos A - 1}.$$

Recreaţii Ştiinţifice, VI(1888)-*Problema 285,* p.96

Soluţie (*ibidem*, p.273). Dacă O se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, atunci $\triangle ABC$ este isoscel (cu vârful în A). Excludem acest caz banal. De asemenea, cu teorema lui Pitagora şi calcule de rutină, avem: $m(\widehat{IOI'}) = 90° \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 60° \Leftrightarrow 2\cos A - 1 = 0$ şi formula are loc. Apoi, dacă $\widehat{C} > \widehat{B}$, atunci O se află în semiplanul determinat de dreapta II' care nu conţine vârful C (chiar dacă $\widehat{A}$ sau $\widehat{C}$ este obtuz).



În $\triangle OII'$, cu teorema cosinusului, avem:

$$\cos\widehat{IOI'} = \frac{OI^2 + OI'^2 - II'^2}{2OI \cdot OI'}.$$

Pe de altă parte, cu teorema sinusurilor aplicată $\triangle OII'$ şi $\triangle OI'A$, avem:

$$\sin\widehat{IOI'} = \frac{II' \cdot \sin\widehat{OI'I}}{OI} = \frac{R \cdot II' \cdot \sin\widehat{OAI}}{OI \cdot OI'}.$$

Ca urmare, obţinem că

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\widehat{IOI'} = \frac{2R \cdot II' \cdot \sin\widehat{OAI}}{OI^2 + OI'^2 - II'^2}.$$

În $\triangle AOI$ şi $\triangle AOI'$ avem relaţiile: $OI^2 = R^2 + AI^2 - 2R \cdot AI \cdot \cos\widehat{OAI}$ şi $OI'^2 = R^2 + AI'^2 - 2R \cdot AI' \cdot \cos\widehat{OAI}$, care, înlocuite în (1), conduc la

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\widehat{IOI'} = \frac{R \cdot II' \cdot \sin\widehat{OAI}}{R^2 + AI \cdot AI' - R(AI + AI')\cos\widehat{OAI}}.$$

Pentru AI, AI' şi II' se cunosc sau se stabilesc uşor formulele următoare:

$$\text{(3)} \qquad AI = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}, \quad AI' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad II' = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Să mai observăm că, dacă $\widehat{C} > \widehat{B}$, vom avea

$$m(\widehat{OAI}) = \frac{A}{2} - m(\widehat{OAB}) = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}(\pi - 2C) = \frac{C-B}{2},$$

iar, dacă $\widehat{B} > \widehat{C}$, vom obţine $m(\widehat{OAI}) = \dfrac{B-C}{2}$. Aşadar, în ambele cazuri, avem

$$\text{(4)} \qquad m(\widehat{OAI}) = \frac{|B-C|}{2}.$$

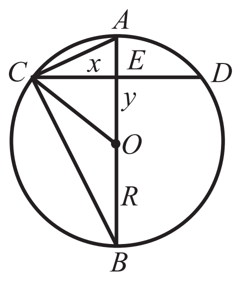
Nu mai rămâne decât să înlocuim în (2) expresiile mărimilor ce intervin, date de (3) şi (4), şi să facem calcule de rutină pentru a ajunge la rezultatul dorit.

Notă. Această problemă a fost rezolvată de *Vasile Cristescu*, viitorul fondator şi unul dintre cei patru "stâlpi" ai *Gazetei Matematice.*

4. *Să se taie o sferă cu un plan astfel încât diferenţa volumelor conurilor drepte ce au ca baze secţiunea planului cu sfera şi vârfurile pe sferă să fie maximă.*

Recreaţii Ştiinţifice, IV(1886)-*Problema 227,* p.288

Soluţie. (*Recreaţii Ştiinţifice*, t. V, pp.89, 113, 277). Să notăm cu x raza bazei conurilor şi cu y distanţa centrului sferei la planul de secţiune. Înălţimile conurilor fiind $R+y$ şi $R-y$, unde R notează raza sferei, diferenţa V a a volumelor conurilor este dată de formula



$$V = \frac{1}{3}\pi x^2(R+y) - \frac{1}{3}\pi x^2(R-y) = \frac{2}{3}\pi x^2 y.$$

Având în vedere că $x^2 = (R+y)(R-y)$ (teorema înălţimii), obţinem că

$$V = \frac{2}{3}\pi y(R^2 - y^2).$$

Valoarea y pentru care V este maxim este aceeaşi cu cea pentru care este maxim produsul $y(R^2-y^2)$ sau pătratul acestuia $y^2(R^2-y^2)^2$. Cum suma factorilor ultimului produs este $y^2 + (R^2 - y^2) = R^2$ =constant, rezultă că el va fi maxim pentru valorile y ce satisfac condiţia

$$\frac{y^2}{1} = \frac{R^2 - y^2}{2} \Leftrightarrow 3y^2 = R^2,$$

adică $y = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. Obţinem că V are valoarea maximă egală cu $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$.

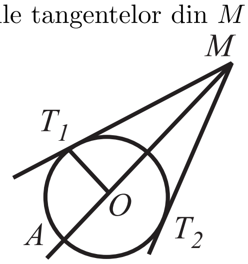
Secţiunea cu un plan perpendicular pe un diametru AB în punctul E al acestuia, cu $OE = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, va satisface cerinţele problemei.

Notă. *Vasile Cristescu*, elev al Licelui Naţional din Iaşi, dă două soluţii acestei probleme.

5. *Fie M un punct exterior cercului $\mathcal{C}$ de centru O şi raza R. Notăm cu T_1, T_2 punctele de contact ale tangentelor duse din M la $\mathcal{C}$ şi cu A punctul de intersecţie a dreptei OM cu cercul $\mathcal{C}$ care verifică condiţia $A \notin [OM]$. Să se determine mulţimea punctelor M pentru care se poate construi un triunghi cu segmentele $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MO]$, dar nu se poate construi un triunghi cu $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MA]$.*

Recreaţii Matematice, 1/2009-*Problema L156,* p.78

Soluţie. Notăm cu d distanţa între M şi O şi cu t lungimile tangentelor din M. Condiţia necesară şi suficientă de existenţă a unui triunghi având laturile $[MT_1], [MT_2]$ şi $[MO]$ este $d < 2t$, iar cea de non-existenţă a unui triunghi cu laturile $[MT_1]$, $[MT_2]$ şi $[MA]$ este $d + R \geq 2t$. Mulţimea X căutată este



$$\begin{aligned} X &= \{M | d < 2t\} \cap \{M | d + R \geq 2t\} \\ &= \{M | d < 2\sqrt{d^2 - R^2}\} \cap \{M; d + R \geq 2\sqrt{d^2 - R^2}\} \\ &= \{M | 3d^2 > 4R^2\} \cap \{M | 3d^2 - 2Rd - 5R^2 \leq 0\} \\ &= \{M | d > \frac{2\sqrt{3}}{3}R\} \cap \{M | 3(d + R)(d - \frac{5}{3}R) \leq 0\} \\ &= \{M | \frac{2\sqrt{3}}{R} < d \leq \frac{5}{3}R\}, \end{aligned}$$

adică X este coroana de centru O şi raze $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $\dfrac{5}{3}R$ incluzând cercul mare, dar nu şi pe cel mic.

Recreaţii ... matematice

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$