Concursul "Recreaţii Matematice" Ediţia a VI-a, Muncel (Iaşi), 26 august 2008

Clasa a VI-a

1. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $A = 7{\cdot}19{\cdot}31{\cdot}\ldots{\cdot}1999{\cdot}2011$. (Numărul A reprezintă produsul tuturor numerelor naturale mai mici decât 2012 care dau restul 7 la împărţirea cu 12.)

2. Se consideră şirul de numere naturale $1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, \ldots$ Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

3. Pe o masă sunt mai multe bomboane, iar în jurul mesei sunt aşezaţi mai mulţi elevi. Primul elev ia de pe masă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane; al doilea ia $\frac{1}{15}$ din numărul bomboanelor rămase şi încă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane luate de primul elev. Al treilea elev ia $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane rămase şi încă $\frac{1}{15}$ din numărul de bomboane luate de primul şi al doilea elev împreună etc. Procedeul continuă până când ultimul elev reuşeşte să ia ultimele bomboane de pe masă, după regula de mai sus. Aflaţi numărul de elevi.

Clasa a VII-a

1. Determinaţi $p \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $p, p+12, p+22, p+52, p+72, p+102$ şi $p+132$ sunt prime.

2. Alegeţi în faţa fiecăruia dintre numerele 1, 2, 3, ..., 2009 unul dintre semnele + sau − astfel încât numărul $A = |\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm 2009|$ să ia cea mai mică valoare posibilă.

3. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ având măsura de $120°$, iar P un punct pe bisectoarea sa astfel încât $OP = OA + OB$. Să se arate că triunghiul PAB este echilateral.

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^4 + 4y^4 = 2z^4 + 8u^4$.

2. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d pentru care $ac + bd = 1$ iar $ad + bc = 2$.

3. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^o$ şi $D \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = 30^o$ şi $CD = AB = 1$. Să se calculeze lungimea segmentului $[BC]$, ştiind că aceasta este un număr natural nenul.

Clasa a IX-a

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}$. Determinaţi n, ştiind că există o funcţie $f : A \to A$ astfel încât $f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, $\forall x, y \in A$.

2. Arătaţi că $x + y + z - xy - yz - zx \leq 1, \forall x, y, z \in [0; 1]$.

3. Fie $M \in \mathrm{Int}(\Delta ABC)$. Dacă P este perimetrul $\triangle ABC$, demonstraţi că

$$\frac{P}{2} < MA + MB + MC < P.$$

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11 \cdot \left[\frac{n}{36}\right].$$

(s-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x).

2. Fie punctul M interior triunghiului ABC şi fie $AM \cap BC = \{A'\}, BM \cap AC = \{B'\}, CM \cap AB = \{C'\}$. Se notează cu S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 şi S_6 ariile triunghiurilor $MA'B, MA'C, MB'C, MB'A, MC'A$, respectiv, $MC'B$. Să se demonstreze că

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3$$

dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie surjectivă şi strict crescătoare. Să se determine funcţiile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $g(f(x)) \leq x \leq f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Apoi, să se determine g dacă $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, x \in \mathbb{R}$.

Clasa a XI-a

1. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $|3^{-x} - 4| - \left|x^3 - 3\right| = a\left(x^3 - 3^{-x} + 1\right)$, unde $a > 1$, fixat.

2. Fie n puncte pe un cerc, cu proprietatea că oricare două coarde cu extremităţile în cele n puncte nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente într-un punct situat în interiorul cercului. Să se determine numărul de regiuni din interiorul cercului delimitate de laturile şi diagonalele poligonului convex care are ca vârfuri cele n puncte date, $n \geq 4$.

3. Să se calculeze suma $S(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} C_{n+k}^{k}$.

Clasa a XII-a

1. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{\ln x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^n$.

2. Cercetaţi dacă există $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A + 2005B) = 0$ şi $\det(A + 2007B) = 2009$.

3. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

(i) funcţia f are limite laterale în orice punct $a \in \mathbb{R}$ şi

$$f(a - 0) \leq f(a) \leq f(a + 0);$$

(ii) pentru orice $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, avem $f(a - 0) < f(b - 0)$.

Să se arate că f este strict crescătoare.