Principiul extremal

Gabriel POPA[1]

Ne vom referi în cele ce urmează la o importantă metodă de raţionament, utilă în soluţionarea unei importante clase de probleme. Ideea este aceea de a ne concentra asupra celui mai mare/mic element al unei mulţimi asociată problemei şi de a vedea ce informaţii oferă acest "element extremal". Exemplul tipic este cel din demonstraţia lui *Euclid* pentru caracterul infinit al mulţimii numerelor prime: se presupune că mulţimea numerelor prime ar fi finită, rezultă existenţa unui cel mai mare număr prim p şi construim un element al mulţimii numerelor prime mai mare decât p. Elevii întâlnesc în şcoală aceeaşi idee atunci când demonstrează iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$ sau existenţa celui mai mare divizor comun cu ajutorul algoritmului lui Euclid.

Precizăm că următoarele două tipuri de mulţimi se pretează la aplicarea principiului extremal: 1) *mulţimile finite* de numere reale, care au atât un cel mai mare, cât şi un cel mai mic element şi 2) *submulţimile lui* $\mathbb{N}$, care au întotdeauna un cel mai mic element. În cel de-al doilea caz, principiul îmbracă uneori forma *coborârii infinite*, pe care o vom prezenta mai jos.

Există (cel puţin) trei materiale foarte bune şi accesibile ([**1**], [**2**, pp.15-16], [**3**, pp.53-75]) cu ajutorul cărora se poate realiza familiarizarea cu principiul extremal. Ne propunem să prezentăm alte câteva probleme, care să vină în sprijinul celor interesaţi de acest subiect.

Problema 1. *Într-un turneu de şah, fiecare dintre jucători dispută câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi. Ştiind că nu se înregistrează nicio remiză şi că fiecare participant obţine cel puţin câte o victorie, demonstraţi că există un grup de trei şahişti A, B, C astfel încât A îl învinge pe B, B îl învinge pe C şi C îl învinge pe A.* (*Olimpiadă Irlanda, 2004*)

Soluţie (**Titu Zvonaru**). Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ şahiştii care participă la turneu şi notăm cu a_i numărul învinşilor jucătorului P_i. Din ipoteza problemei, avem că $a_i \geq 1$, $\forall i = \overline{1, n}$. Mulţimea finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are un cel mai mic element; putem presupune că acesta este a_1 şi fie $P_2, P_3, \ldots, P_{a_1+1}$ şahiştii pe care îi învinge P_1. Cum $a_1 \leq a_2$, există un participant P_k învins de către P_2, unde $k \geq a_1 + 2$. Considerând $A = P_1$, $B = P_2$ şi $C = P_k$, avem îndeplinită cerinţa problemei.

Problema 2. *Spunem că o mulţime $M \subset \mathbb{R}_+$ are proprietatea (P) dacă orice element al lui M este media geometrică a două elemente distincte ale lui M.*

a) O mulţime cu 2005 *elemente poate avea proprietatea (P)?*

b) Arătaţi că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea (P).

(**Gabriel Popa şi Paul Georgescu**, *Recreaţii Matematice-2/2005,* p.170)

Soluţie. a) În general, nicio mulţime finită M nu poate avea proprietatea (P). Într-adevăr, dacă M este o mulţime finită, atunci M are un cel mai mare element, fie acesta a. Dacă a ar fi media geometrică a elementelor $b, c \in M$, cu $b < c$, ar trebui să avem $b < a < c$. Astfel, c este un element al lui M strict mai mare decât a şi se ajunge la o contradicţie.

[1] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

b) Se observă că pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, mulţimea $M_x = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\}$ are proprietatea (P), deoarece $x^n = \sqrt{1 \cdot x^{2n}}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, iar $1 = \sqrt{x^n \cdot x^{-n}}$.

Problema 3. *Spunem că o mulţime $A \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea (P) dacă $\forall a, b \in A$, există $c \in A \backslash \{a, b\}$ astfel încât a, b, c să fie lungimile laturilor unui triunghi.*
a) $\mathbb{N}^*$ are proprietatea (P)?
b) Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi având proprietea (P).

(**Gabriel Popa**, *Concursul "Radu Miron"*, 2003)

Soluţie. a) Vom lua în considerare cel mai mic element al lui $\mathbb{N}^*$, anume pe 1. Dacă $b, c \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $b \neq c$, este evident că numerele $1, b, c$ nu pot fi lungimile laturilor unui triunghi (dacă $b < c$, atunci $1 + b \leq c$ şi este contrazisă inegalitatea triunghiului).

b) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, atunci mulţimea $A_n = \{2, 3, \ldots, n\}$ are proprietatea (P). Într-adevăr, dacă $a, b \in A$ şi $a \leq b - 2$, putem considera $c = b - 1$, iar dacă $a = b - 1$, luăm convenabil $c \in \{b - 2, b + 1\}$.

Problema 4. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi A mulţimea numerelor naturale cel puţin egale cu 2, care sunt relativ prime cu fiecare dintre numerele $1, 2 \ldots, n$. Demonstraţi că A nu poate conţine doar numere compuse.*

Soluţie. Cum A este o mulţime de numere naturale, va conţine un cel mai mic element, fie acesta p. Vom demonstra că p este prim, de unde concluzia problemei. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că p nu ar fi prim; cum $p \geq 2$, înseamnă că este compus, prin urmare există q prim şi $k \geq 2$ astfel încât $p = q \cdot k$. Numărul prim q nu divide niciunul dintre numerele $1, 2 \ldots, n$ şi atunci $q \in A$. Pe de altă parte, $q < p$, ceea ce contrazice faptul că p este cel mai mic element al lui A.

Problema 5. *Fie x, y, z trei numere prime distincte. Demonstraţi că $30(xy + yz + zx) \leq 31xyz$.*

(**Marius Ghergu**, *Concursul "Florica T. Câmpan"*, 2005)

Soluţie. Încercăm să folosim buna ordonare a mulţimii numerelor prime. Împărţind ambii membri prin $30xyz$, inegalitatea dată se scrie echivalent sub forma $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{31}{30}$. Cum valorile minime ale numerelor prime distincte x, y, z sunt 2, 3 şi 5, valoarea maximă a sumei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ este $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$, fapt care încheie rezolvarea problemei.

Problema 6. *Pe tablă sunt scrise numerele $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{3} + 1$ şi 2. Se şterg numerele şi se scriu în locul lor cele trei medii geometrice a câte două dintre numerele iniţiale. Procedeul se repetă cu noile numere. Este posibil ca, după mai mulţi paşi, să avem pe tablă $2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$ şi 4?*

(**Monica Nedelcu**, *Concursul "Florica T. Câmpan"*, 2007)

Soluţie. Teoretic, asemenea probleme se rezolvă folosind principiul invariantului; în cazul problemei date, încercările de a găsi un invariant (sau măcar un semiinvariant) nu dau prea repede roade! Observăm însă că, întrucât media geometrică a două numere distincte este strict cuprinsă între numărul mai mic şi cel mai mare, numărul maxim de pe tablă scade la fiecare repetare a operaţiei. Iniţial, acest maxim era

$\sqrt{3}+1$ şi deducem că nu vom putea face în aşa fel încât pe tablă să apară numărul mai mare 4.

Problema 7. *Demonstraţi că nu există triunghiuri dreptunghice având catetele numere raţionale, iar ipotenuza egală cu* $\sqrt{2001}$.

(**Constantin Cocea**, *RecMat-1/2002*, p.81)

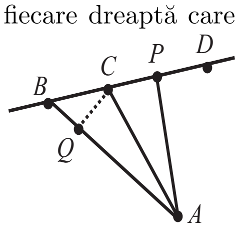
Soluţia. Pentru a arăta că ecuaţia $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{z^2}{u^2}=2001$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, este suficient să demonstrăm că ecuaţia $m^2+n^2=2001p^2(*)$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Vom utiliza *metoda coborârii*, o variantă a principiului extremal. Presupunem că ecuaţia $(*)$ are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Cum $\mathbb{N}^*$ este bine ordonată, putem considera acea soluţie pentru care p este minim. Observăm că $3|m^2+n^2$ (deoarece 2001 se divide cu 3) şi atunci m şi n sunt multipli de 3, după cum se poate uşor demonstra. Fie $m=3m_1$, $n=3n_1$ cu $m_1,n_2\in\mathbb{N}^*$; din $(*)$ obţinem că $3(m_1^2+n_1^2)=667p^2$ şi, cum $(3,667)=1$, atunci $p=3p_1$, $p_1\in\mathbb{N}^*$. După înlocuire, $m_1^2+n_1^2=2001p_1^2$, prin urmare (m_1,n_1,p_1) este o nouă soluţie a ecuaţiei $(*)$, cu $p_1<p$. Am contrazis astfel minimalitatea asumată a lui p şi urmează că ecuaţia $(*)$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Problema 8. *Se consideră şase discuri astfel încât frontierele lor au un punct comun. Demonstraţi că există o pereche de discuri astfel încât unul dintre ele conţine centrul celuilalt.*

Soluţie. Fie $O_1,O_2,\ldots,O_6$ centrele celor şase discuri, iar A punctul comun al frontierelor lor. Considerăm toate unghiurile cu vârful în A şi având ca laturi semidrepte de forma $[AO_i, i=\overline{1,6}$. Dacă unul dintre aceste unghiuri este nul, cerinţa problemei este imediată. Dacă toate sunt nenule, considerăm un unghi de măsură minimă, fie acesta $\widehat{O_1AO_2}$. Presupunând, fără a restrânge generalitatea, că $AO_2\geq AO_1$, vom avea că $m(\widehat{O_1AO_2})\leq 60^\circ$, $m(\widehat{AO_1O_2})\geq 60^\circ$, prin urmare $O_1O_2\leq AO_2$ şi astfel deducem că O_1 aparţine discului de centru O_2.

Problema 9. *Fie M o mulţime finită de puncte din plan cu proprietatea că orice dreaptă care uneşte două puncte ale lui M conţine cel puţin trei puncte din M. Demonstraţi că toate punctele din M sunt coliniare.* (**Sylvester**)

Soluţie. Calculăm distanţele de la fiecare punct din M la fiecare dreaptă care uneşte două puncte din M. Să presupunem că există astfel de distanţe nenule; cum numărul lor este finit, există o asemenea distanţă care este cea mai mică. Notăm această distanţă cu d şi să zicem că $d=\text{dist}(A,BC)$, cu $A,B,C\in M$. Conform ipotezei, mai există un punct $D\in BC$. Notăm cu P piciorul perpendicularei din A pe BC; măcar două dintre punctele B,C şi D sunt de aceeaşi parte a lui P şi să presupunem că acestea sunt B şi C, cu $C\in(PB)$. În aceste condiţii, $\text{dist}(C,AB)<d(A,BC)=d$, fapt care contrazice minimalitatea lui d. Rămâne că toate punctele din M sunt coliniare.



Propunem spre rezolvare câteva probleme, bazate pe aceeaşi idee.

Problema 10. *Şase unghiuri în jurul unui punct au proprietatea că diferenţa măsurilor oricăror două unghiuri consecutive este de* 2°*. Determinaţi măsurile unghiurilor.*

(**Dragoş Moldoveanu**, *O.M., etapa locală, Prahova,* 2008)

Problema 11. *Interiorul unui pătrat este descompus într-un număr finit de pătrate mai mici, cu ajutorul unor paralele duse la laturile sale. Demonstraţi că măcar două dintre pătratele descompunerii au laturile de lungimi egale.*

Problema 12. *Fie suma* $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \frac{1}{41} + \ldots + \frac{1}{50}$*. Dacă* S *se scrie ca fracţie ireductibilă sub forma* $\frac{p}{q}$*, demonstraţi că* $p \vdots 89$*, iar* $q \vdots 2$*.* (*O.M., etapa locală, Iaşi, 2007*)

Problema 13. *Fie* x, y, z *trei numere prime distincte. Să se demonstreze că* $3(x+y)(y+z)(z+x) < x^2y^2z^2$*.* (*Concursul "Florica T. Câmpan",* 2005)

Problema 14. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$*. Demonstraţi că oricum am alege* $B \subset A$ *cu* $|B| = n+1$*, fie putem selecta trei elemente ale lui* B *cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlaltor două, fie putem selecta două elemente ale lui* B*, unul fiind dublul celuilalt.*

Problema 15. *Rezolvaţi în* $\mathbb{Z}$ *ecuaţia* $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x^2y^2z^2$*.*

(**Dan Radu**, *G.M.-A,3/2007*)

Problema 16. *Determinaţi mulţimea numerelor naturale* n *pentru care există* n *cercuri în plan cu interioarele disjuncte, fiecare dintre ele tangent la cel puţin alte şase cercuri dintre cele* n*.*

(**Luis Funar**, *Concurs R.M.T., ediţia a V-a*)

Problema 17. *În sistemul solar Câinele Verde sunt* 2001 *planete. Pe fiecare dintre aceste planete este câte un astronom care se uită prin telescop la planeta cea mai apropiată. Dacă distanţele reciproce dintre planete sunt diferite, demonstraţi că există o planetă la care nu se uită nimeni.*

(**Daniel Stretcu**, *E:13684, G.M. 7-8/2008,* p.400; [**2**], *4.3,* p.15)

Nu putem încheia fără a mulţumi domnului **Mircea Lascu**, la insistenţele căruia am scris această notă.

Bibliografie

1. <*Principiul extremal*>, http://math.ournet.md/competitiva/extrem/extrem.html
2. **N. Agahanov, O. Podlipsky** - *Olimpiadele matematice ruseşti*, GIL, Zalău, 2004.
3. **A. Engel** - *Probleme de matematică-Strategii de rezolvare*, GIL, Zalău, 2006.
4. **N.N. Hârţan** - *Matematică pentru clasa a V-a*, Moldova, Iaşi, 1995.
5. **E.A. Morozova, I.S. Petrakov, V.A. Skvorţov** - *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.