Asupra determinării imaginii unei funcţii de mai multe variabile

Daniel VĂCARU[1]

Vom insista asupra unei metode mai speciale de demonstrare a inegalităţilor, care se pretează la generalizări şi pe care o vom folosi în rezolvarea unor probleme dificile. Primele două aplicaţii pot fi găsite în aproape orice culegere de probleme de algebră pentru liceu, iar următoarele au apărut în ultimul timp în reviste de matematică elementară, ca probleme propuse.

Problema 1. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z - a > 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Gândim expresia din membrul stâng al inegalităţii din enunţ ca funcţie de variabila reală x, cu y şi z parametri. Prin urmare, vom considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+4x+(y^2+z^2+2y+2z-a)$, pe care o vom deriva, obţinând că $f'(x) = 2x+4$. Cum $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, -2)$, $f'(-2) = 0$ şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-2, +\infty)$, deducem că $x = -2$ este punct de minim, iar $\mathrm{Im} f = [f(-2), +\infty]$, unde $f(-2) = y^2 + z^2 + 2y + 2z - a - 4$. Dorim ca $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, şi atunci vom impune condiţia $f(-2) > 0$. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + 2y + (z^2 + 2z - a - 4)$, cu derivata $g'(y) = 2y + 2$. Obţinem că $y = -1$ este punct de minim al lui g, iar valoarea minimă este $g(-1) = z^2 + 2z - a - 5$. Vrem ca $g(-1) > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$, fapt care conduce la $h(z) > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$, unde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(z) = z^2 + 2z - a - 5$. Deducem, din nou cu ajutorul derivatei, că $h(z) \geq h(-1) = a - 6$ şi cum trebuie verificată condiţia $h(-1) > 0$, obţinem că $a \in (-\infty, -6)$ este condiţie necesară şi suficientă pentru ca inegalitatea din enunţ să aibă loc pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *Pe mulţimea* $G = (-1, 1)$ *se consideră operaţia* $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$. *Demonstraţi că* G *este parte stabilă faţă de operaţia definită.*

Soluţie. Pe aceeaşi idee, considerăm funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$, unde $y \in (-1, 1)$ este un parametru. Cum $f'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} > 0$, $\forall x, y \in (-1, 1)$, deducem că f este strict crescătoare, prin urmare $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) < f(x) < \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$, $\forall x \in (-1, 1)$. Dar $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \dfrac{-1+y}{1-y} = -1$, iar $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \dfrac{1+y}{1+y} = 1$, astfel că $-1 < f(x) < 1$, $\forall x \in (-1, 1)$, adică $x * y \in (-1, 1)$, $\forall x, y \in (-1, 1)$.

Problema 3. *Demonstraţi că* $|-3xy + x + y| \leq 1$, $\forall x, y \in [0, 1]$. (**Ovidiu Pop**, *Problema VIII.82*, RecMat-2/2007, p.151)

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-3y+1)x + y$, unde $y \in [0, 1]$. Avem de studiat o funcţie de gradul I pe $\mathbb{R}$. Dacă $y = \dfrac{1}{3}$, funcţia este constant egală

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Zinca Golescu", Piteşti

cu $\frac{1}{3}$, deci $f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, atunci f este strict crescătoare, prin urmare $0 \leq y = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = -2y + 1 \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$. În sfârşit, dacă $y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$, atunci f este strict descrescătoare, astfel că $-1 \leq -2y+1 = f(1) \leq f(x) \leq f(0) = y \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$. Analiza făcută probează cerinţa problemei.

Problema 4. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{4r - R}{R} \leq \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{a}{2}.$$

(**Alexandru Roşoiu**, *Problema 11306,* American Mahematical Monthly).

Soluţie. Începem prin a nota $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$; evident că $x, y, z > 0$. Atunci

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{p} : \frac{abc}{4S} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Inegalitatea din enunţ devine

$$\frac{x+y}{2}\left(\frac{16xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} - 1\right) \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \forall x, y, z > 0.$$

Inegalitatea din dreapta rezultă din inegalitatea mediilor, cu egalitate în cazul în care $x = y$, i.e. $a = b$. Pentru a demonstra inegalitatea din stânga, considerăm funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(z) = 8xy \cdot \frac{z}{(x+z)(y+z)} - \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$. Avem că $f'(z) = 8xy \cdot \frac{-z^2 + xy}{(x+z)^2 \cdot (y+z)^2}$, prin urmare $f'(z) > 0$, $\forall z \in (0, \sqrt{xy})$, $f'(\sqrt{xy}) = 0$ şi $f'(z) < 0$, $\forall z \in (\sqrt{xy}, +\infty)$. Deducem că f are un maxim în $\sqrt{xy}$, iar $f(\sqrt{xy}) = \frac{8xy}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} - \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2}$. Inegalitatea $f(\sqrt{xy}) \leq 0$ revine la $16xy \leq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^4$, care este adevărată conform inegalităţii mediilor. Egalitate se atinge în cazul triunghiului echilateral.

Recreaţii ... matematice

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$
$$111111 \times 111111 = 12345654321$$
$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$
$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$
$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$