O demonstraţie a teoremei a doua a lui Ptolemeu

Gheorghe COSTOVICI[1]

În [**1**], pag. 134–137, se arată echivalenţa afirmaţiilor:

1) (**prima teoremă a lui Ptolemeu**) *dacă un patrulater este inscriptibil, atunci produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse;*

2) *dacă* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*)$, *atunci*
$$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\sin\delta$$
şi apoi, stabilind această identitate, se deduce justeţea primei teoreme a lui Ptolemeu.

Ne propunem un demers similar în privinţa celei de-a doua teoreme a lui Ptolemeu.

Propoziţie. *Dacă* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*)$, *atunci*

$$\sin(\alpha+\gamma)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)=\sin(\beta+\gamma)(\sin\alpha\sin\delta+\sin\beta\sin\gamma). \tag{1}$$

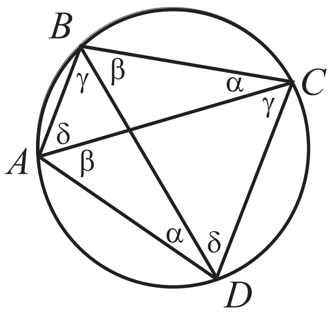
Demonstraţie. Ţinând seama de ipoteză, obţinem:

$$\begin{gathered}4\sin(\alpha+\gamma)(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)=2\sin(\alpha+\gamma)[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)\\+\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)]=2\sin(\alpha+\gamma)[\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]\\=\sin 2\alpha+\sin 2\gamma+\sin(\alpha+\gamma+\beta-\delta)+\sin(\alpha+\gamma-\beta+\delta)\\=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+\sin 2\delta.\end{gathered}$$

La acelaşi rezultat ajungem dacă pornim de la membrul doi al identităţii din enunţ multiplicat cu 4, ceea ce încheie demonstraţia.

Teorema a doua a lui Ptolemeu. *Dacă* $ABCD$ *este un patrulater inscriptibil, atunci are loc relaţia*

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}. \tag{2}$$



Demonstraţie. R fiind raza cercului circumscris patrulaterului, avem: $AB=2R\sin\alpha$, $BC=2R\sin\delta$, $CD=2R\sin\beta$, $DA=2R\sin\gamma$, $AC=2R\sin(\beta+\gamma)$ şi $BD=2R\sin(\alpha+\gamma)$.

Observând că $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, rezultă că are loc (1), care, prin trecere la laturi pe baza egalităţilor de mai sus, conduce la relaţia de demonstrat.

Observaţie. Propoziţia şi Teorema sunt echivalente, în sensul că se implică una pe alta. Cum s-a văzut că Propoziţia implică Teorema, rămâne de stabilit implicaţia inversă. Fie date $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*$ cu $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. Pe un cerc de rază 1 luăm arce de lungimi $2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta$, cu suma egaltă cu 2π (vezi figura). Înlocuind în (2) lungimile AB, BC etc. cu expresiile lor, obţinem imediat relaţia (1).

Bibliografie

1. **I.M. Ghelfand, M. Saul** - *Trigonometry*, Birkhäuser, 2001.

[1]Conf.dr., Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi