O demonstraţie simplă a inegalităţii mediilor

Claudiu-Ştefan POPA[1]

Ne popunem să prezentăm o cale de introducere a inegalităţii mediilor la nivelul clasei a VII-a. Considerăm că această metodă are o serie de avantaje: este uşor de expus de către profesor, facil de înţeles de către elevi, permite recapitularea formulelor de calcul prescurtat şi deschide copiilor noi orizonturi.

În cele ce urmează, a şi b sunt numere reale pozitive, cu $a \leq b$. Mediile uzuale sunt: $M_h = \dfrac{2ab}{a+b}$ (*media armonică*); $M_g = \sqrt{ab}$ (*media geometrică*); $M_a = \dfrac{a+b}{2}$ (*media aritmetică*); $M_p = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (*media pătratică*); $M_{ap} = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ (*media aritmetică ponderată a numerelor a şi b, cu ponderile a, respectiv b*).

Se observă că $a \leq M_g \leq b$ (prima inegalitate revine la $a \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 \leq ab \Leftrightarrow a \leq b$, iar a doua la $\sqrt{ab} \leq b \Leftrightarrow ab \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$). Analog se justifică faptul că $a \leq M_a \leq b$. Reţinem, deci, că media geometrică şi media aritmetică a două numere sunt cuprinse între numărul mai mic şi cel mai mare.

Să calculăm acum media aritmetică a numerelor M_h şi M_{ap}: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2ab}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = \dfrac{a+b}{2} = M_a$. Pe de altă parte, este evident că $M_h \leq M_{ap}$, deoarece această inegalitate revine la $2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$, adevărat. Conform celor de mai sus, obţinem că $M_h \leq M_a \leq M_{ap}$, cu egalitate când $a = b$.

Media geometrică a numerelor M_h şi M_a este $\sqrt{\dfrac{2ab}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{2}} = \sqrt{ab} = M_g$ şi, cum $M_h \leq M_a$, deducem că $M_h \leq M_g \leq M_a$, cu egalitate când $a = b$.

Media geometrică a numerelor M_a şi M_{ap} este $\sqrt{\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{a+b}} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = M_p$. Deoarece $M_a \leq M_{ap}$, rezultă că $M_a \leq M_p \leq M_{ap}$, cu egalitate când $a = b$.

Concluzionăm că, date numerele reale pozitive a şi b, între mediile lor există şirul de inegalităţi

$$M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_p \leq M_{ap},$$

care se transformă în egalităţi pentru $a = b$.

---

[1] Profesor, Şcoala "Alecu Russo", Iaşi