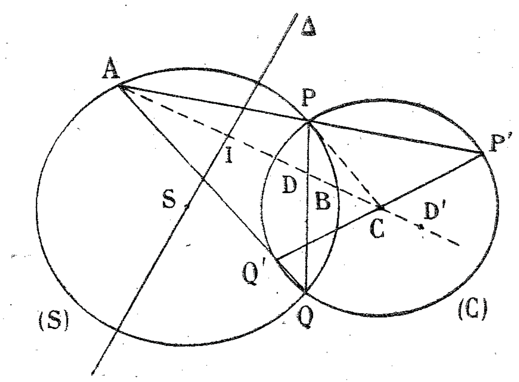
Une application de l'inversion

Adrien REISNER[1]

Etant donné un cercle (C) de centre C et un point A on considère un cercle variable (S) de centre S passant par A et orthogonal à (C), voir figure. Les deux cercles (C) et (S) se coupent en P et Q .

Proposition 1. *Le lieu géométrique du centre S est une droite.*

Démonstration. Soit B le deuxième point commun de la droite CA et du cercle (S). Les deux cercles (C) et (S) étant orthogonaux la droite CP est tangente en P au cercle (S). On a – la puissance du point C par rapport au cercle (S) –: $\overline{CA}{\cdot}\overline{CB} = \overline{CP}^2$ et par suite le point B est fixe. Le cercle (S) passant par les deux points fixes A et B le lieu géométrique de son centre S est la droite (Δ) perpendiculaire à AB menée par le milieu I du segment AB.



Proposition 2. *La corde PQ commune aux cercles (C) et (S) passe par un point fixe.*

Démonstration. La droite PQ est la polaire du point S par rapport au cercle (C). Le lieu géométrique du point S étant la droite (Δ), la polaire du point S passe par un point fixe D pôle de (Δ) par rapport au cercle (C). Les points A, C, B, D sont alignés sur une droite perpendiculaire à la droite (Δ).

Les droites AP et AQ rencontrent à nouveau le cercle (C) respectivement aux points P'et Q'.

Proposition 3. *La droite $P'Q'$ passe par un point fixe.*

Démonstration. Considérons l'inversion ayant pour pôle le point A et pour module la puissance du point A par rapport au cercle (C). Ce cercle (C) coïncide

[1]Centre de Calcul E.N.S.T., Paris; e-mail: *adrien.reisner@enst.fr*

avec son inverse et les points P' et Q' sont les inverses des points P et Q. La droite $P'Q'$ est l'inverse du cercle (APQ) c'est – a – dire du cercle (S). Le cercle (S) étant orthogonal au cercle (C) on en déduit que la droite $P'Q'$ passe par le point fixe C.

Remarque. Le cercle (S) passe aussi par le point fixe B. Donc $P'Q'$ passe par l'inverse du point B et par suite les points B et C sont des points inverses l'un de l'autre.

Proposition 4. *Le cercle circonscrit au triangle passe par un point fixe.*

Démonstration. Le cercle circonscrit au triangle $AP'Q'$ est l'inverse de la droite PQ. Cette droite PQ passant par le point fixe D, le cercle $(AP'Q')$ passe par le point fixe D' inverse du point D. Démontrons que ce point D' est le symétrique de B par rapport au point C. En effet en considérant les puissances du point C par rapport aux cercles (S) et $(AP'Q')$ on a:

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CP}^2 \quad \text{et} \quad \overline{CA} \cdot \overline{CD'} = \overline{CP'} \cdot \overline{CQ'} = -\overline{CP}^2.$$

On en déduit immédiatement que $\overline{CB} = -\overline{CD'}$, d'où la propriété annoncée.

Références

1. **J. Commeau -** *Géométrie* (pages 398–424), Edition Masson.
2. **A. Lentin, G. Girard -** *Géométrie. Mécanique* (pages 303–328), Edition Hachette.

Recreații ... matematice

$$\begin{array}{rr}
1 \times 8 + 1 = 9 & 1 \times 9 + 2 = 11 \\
12 \times 8 + 2 = 98 & 12 \times 9 + 3 = 111 \\
123 \times 8 + 3 = 987 & 123 \times 9 + 4 = 1111 \\
1234 \times 8 + 4 = 9876 & 1234 \times 9 + 5 = 11111 \\
12345 \times 8 + 5 = 98765 & 12345 \times 9 + 6 = 111111 \\
123456 \times 8 + 6 = 987654 & 123456 \times 9 + 7 = 1111111 \\
1234567 \times 8 + 7 = 9876543 & 1234567 \times 9 + 8 = 11111111 \\
12345678 \times 8 + 8 = 98765432 & 12345678 \times 9 + 9 = 111111111 \\
123456789 \times 8 + 9 = 987654321 & 123456789 \times 9 + 10 = 1111111111
\end{array}$$