Cercuri tangente la două cercuri date

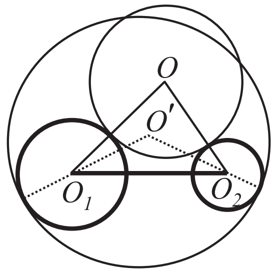
Geanina HĂVÂRNEANU[1]

Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două cercuri date într-un plan. Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor tangente la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

Un prim gând în scopul propus este acela de a folosi metoda coordonatelor. Vom vedea, însă, că este preferabil să abordăm problema cu mijloacele geometriei sintetice; vor fi evitate astfel calculele neplăcute (destul de simple, ce-i drept!).

Fie O_1 şi respectiv O_2 centrele cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi u distanţa centrelor lor. Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că raza cercului $\mathcal{C}_1$ este 1, iar a lui $\mathcal{C}_2$ este $v \leq 1$. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc tangent la $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi variabil. Este evident faptul că locul geometric căutat, locul punctului O, depinde de poziţia relativă atât a cercurilor fixe $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ cât şi a cercului variabil $\mathcal{C}$ faţă de cele fixe.



I. **$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt exterioare ($u > 1 + v$).** Distingem patru familii de cercuri $\mathcal{C}$ tangente la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$: 1) $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; 2) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$; 3) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ este tangent interior la $\mathcal{C}$; 4) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_1$ este tangent interior la $\mathcal{C}$.

În cazul 1), avem $OO_1 - OO_2 = (1 + r) - (v + r) =$
$$= 1 - v = \begin{cases} \text{const.}, & v < 1 \\ 0, & v = 1. \end{cases}$$

În cazul 2), avem $O'O_2 - O'O_1 = (r - v) - (r - 1) = 1 - v = \begin{cases} \text{const.}, & v < 1 \\ 0, & v = 1. \end{cases}$

Pentru $v < 1$, în ambele cazuri, avem $|OO_1 - OO_2| = 1 - v > 0$, adică punctul O parcurge o hiperbolă $\mathcal{H}_1$ cu focarele O_1 şi O_2, cu centrul în mijlocul segmentului $[O_1O_2]$ şi vârfurile $V_1, V_1' \in (O_1O_2)$ precizate de $O_1V_1 = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1 - v}{2}$ (după cum rezultă din relaţiile $V_1O_1 - V_1O_2 = 1 - v$ şi $O_1O_2 = u$) şi $O_1V_1' = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1 - v}{2}$. Ramura "dreaptă" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$ este locul centrelor cercurilor $\mathcal{C}$ aflate în cazul 1), căci în acest caz $OO_1 > OO_2$, iar ramura "stângă" este locul centrelor aflate în cazul 2), căci în acest caz avem $O'O_1 < O'O_2$.

Pentru $v = 1$ (adică cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt egale), în ambele cazuri se obţine $OO_1 = OO_2$ şi locul geometric căutat este mediatoarea segmentului $[O_1O_2]$. Hiperbola $\mathcal{H}_1$ degenerează în această mediatoare.

Procedăm la fel în cazurile 3) şi 4) (cititorul va face singur figura). În cazul 3) avem $OO_1 - OO_2 = (1 + r) - (r - v) = 1 + v$, iar în cazul 4) avem $OO_2 - OO_1 = (r + v) - (r - 1) = 1 + v$. Aşadar, în aceste cazuri $|OO_1 - OO_2| = 1 + v$, adică locul

[1] Profesor, Şcoala generală Horleşti, Horleşti (Iaşi)

geometric este o hiperbolă $\mathcal{H}_2$ cu focarele tot punctele O_1, O_2 şi vârfurile V_2, V_2' date de $O_1V_2 = \frac{u}{2} + \frac{1+v}{2}$ şi $O_1V_2' = \frac{u}{2} - \frac{1+v}{2}$. Ramura "dreaptă" a hiperbolei $\mathcal{H}_2$ este parcursă în cazul 3), iar cea "stângă" în cazul 4). Să mai observăm că situaţa $v = 1$ nu necesită o tratare distinctă.

În concluzie, *locul geometric al centrelor cercurilor tangente la două cercuri* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *exterioare este format din hiperbolele* $\mathcal{H}_1$ *şi* $\mathcal{H}_2$*, dacă* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *au raze diferite, sau din mediatoarea segmentului* $[O_1O_2]$ *şi* $\mathcal{H}_2$*, dacă aceste cercuri au raze egale.*

I$'$. **$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior** ($u = 1 + v$), caz limită al celui de mai sus. Familiile de cercuri 1) şi 2) conduc şi aici la o hiperbolă $\mathcal{H}_1$ (degenerată, dacă $v = 1$), iar familiile 3) şi 4) conduc la relaţia $|OO_1 - OO_2| = 1 + v = u$, care spune că punctul mobil O aparţine lui d (d notează linia centrelor O_1 şi O_2) şi $O \notin [O_1O_2]$.

Să observăm, însă, că în acest caz intră în discuţie încă două familii de cercuri $\mathcal{C}$: 5) $\mathcal{C}$ este tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; 6) $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi interior la $\mathcal{C}_2$. În aceste cazuri, $\mathcal{C}$ va fi tangent la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în punctul T de tangenţă a acestor din urmă cercuri. În cazul 5), avem $OO_1 = 1 - r$ şi $OO_2 = v + r$, cu $0 \leq r \leq 1$, adică O parcurge segmentul $[O_1T]$. În cazul 6), avem $OO_1 = 1 + r$ şi $OO_2 = v - r$, cu $0 \leq r \leq v$, adică O parcurge $[TO_2]$.

Cu alte cuvinte, punctul mobil O parcurge dreapta d, dacă cercul $\mathcal{C}$ este în cazurile 3)–6); altfel spus, hiperbola $\mathcal{H}_2$ degenerează în dreapta d a centrelor cercurilor fixe.

Rezumând, *dacă* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *sunt tangente exterior, locul centrelor cercurilor* $\mathcal{C}$ *tangente la aceste două cercuri este format dintr-o hiperbolă* $\mathcal{H}_1$ (*care degenerează în mediatoarea segmentului* $[O_1O_2]$ *atunci când* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *au raze egale*) *şi dreapta* d.

Observaţie. Vom da o schiţă de rezolvare analitică a problemei enunţate în cazul cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ exterioare şi de raze diferite.

Considerăm un reper cartezian drept cu originea în O_1, având axa x-lor dreapta determinată de O_1 şi O_2, cu sensul de la O_1 la O_2 şi unitatea de măsură egală cu raza cercului $\mathcal{C}_1$. Atunci, avem $O_1(0,0)$ şi $O_2(u,0)$ şi fie $O(x,y)$.

În cazul familiei 1) de cercuri $\mathcal{C}$ se impun condiţiile:

$$x^2 + y^2 = (r+1)^2 \;\text{ şi }\; (x-u)^2 + y^2 = (r+v)^2.$$

Prin scădere, vom găsi $r = \dfrac{u^2 - 2ux - v^2 + 1}{2(v-1)}$ cu care eliminăm r din prima ecuaţie, obţinând în cele din urmă ecuaţia locului

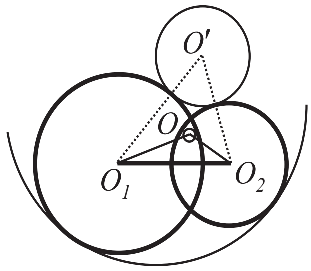
$$\frac{\left(x - \dfrac{u}{2}\right)^2}{\dfrac{(1-v)^2}{4}} - \frac{y^2}{\dfrac{u^2 - (1-v)^2}{4}} = 1,$$

adică hiperbola $\mathcal{H}_1$ (ramura "dreaptă", căci $v < 1$).

Aceste calcule, cât şi cele ce trebuie făcute în cazul familiilor de cercuri 2)–4), ne conving de avantajul abordării sintetice.

II. **$\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante ($1 - v < u < 1 + v$).** Cercul $\mathcal{C}$ tangent la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ poate fi în unul dintre următoarele cazuri: 1° $\mathcal{C}$ este tangent interior cercurilor $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; 2° $\mathcal{C}$ este tangent exterior cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$; 3° $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$; 4° $\mathcal{C}$ este tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; 5° $\mathcal{C}$ este tangent exterior la $\mathcal{C}_1$ şi interior la $\mathcal{C}_2$.

În cazul 1°, avem $OO_1 - OO_2 = (1 - r) - (v - r) = 1 - v$ şi $0 \le r \le \dfrac{1 + u - v}{2}$; în cazul 2°, avem $O'O_1 - O'O_2 = (1 + r) - (v + r) = 1 - v$ şi $v \ge 0$. Împreună, aceste două cazuri dau, ca făcând parte din locul geomeric, ramura "dreapta" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$ (cazul 1° dă arcul din partea comună cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, iar 2° restul ramurei). În cazul 3°, avem $O''O_2 - O''O_1 = (r - v) - (r - 1) = 1 - v$ şi $r \ge 1$, adică ramura "stângă" a hiperbolei $\mathcal{H}_1$.



Cazurile 4° şi 5° (cititorul va face singur figura) conduc, împreună, la elipsa $\mathcal{E}_1 : OO_1 + OO_2 = 1 + v$ având focarele O_1 şi O_2 şi trecând (evident!) prin punctele de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Într-adevăr, în cazul 4° punctul mobil O verifică relaţia $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (v + r) = 1 + v$, cu $0 \le r \le \dfrac{1 + u - v}{2}$, deci O parcurge arcul elipsei $\mathcal{E}_1$ aflat în cercul $\mathcal{C}_1$, iar în cazul 5° avem $OO_1 + OO_2 = (1 + r) + (v - r) = 1 + v$, cu $0 \le r \le \dfrac{u + v - 1}{2}$, adică O parcurge arcul elipsei $\mathcal{E}_1$ situat în cercul $\mathcal{C}_2$.

Prin urmare, *locul centrelor cercurilor tangente la două cercuri secante $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ este format din hiperbola $\mathcal{H}_1$ (care degenerează în mediatoarea segmentului $[O_1O_2]$ dacă $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ au raze egale) şi elipsa $\mathcal{E}_1$.*

III. **$\mathcal{C}_2$ este interior cercului $\mathcal{C}_1$ ($0 \le u \le 1 - v$).** Avem două familii de cercuri $\mathcal{C}$: i) $\mathcal{C}$ tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi exterior la $\mathcal{C}_2$; ii) $\mathcal{C}$ tangent interior la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangent interior la $\mathcal{C}$.

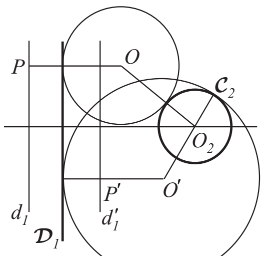
În cazul i) avem $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (v + r) = 1 + v$, adică O parcurge elipsa $\mathcal{E}_1$, iar în cazul ii) avem $OO_1 + OO_2 = (1 - r) + (r - v) = 1 - v > 0$, adică punctul O parcurge o elipsă $\mathcal{E}_2$ având ca focare, ca şi $\mathcal{E}_1$, centrele O_1 şi O_2.

Dacă $\mathcal{C}_2$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}_1$ ($u = 1 - v$), atunci constatăm cu uşurinţă că elipsa $\mathcal{E}_1$ trece prin punctul de tangenţă a acestora, iar $\mathcal{E}_2$ degenerează în segmentul $[O_1O_2]$. Dacă $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt concentrice ($u = 0$), vom avea $OO_1 = \dfrac{1 + v}{2}$ şi, respectiv, $OO_1 = \dfrac{1 - v}{2}$, adică elipsele $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ sunt cercuri concentrice cu $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi având razele semisuma şi respectiv semidiferenţa razelor cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

Conchidem că, *dacă $\mathcal{C}_2$ este interior cercului $\mathcal{C}_1$, locul centrelor cercurilor tangente acestor cercuri este format din elipsele $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ (care vor fi cercuri atunci când $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt concentrice); elipsa $\mathcal{E}_2$ degenerează în segmentul $[O_1O_2]$ în cazul în care $\mathcal{C}_2$ este tangent interior la $\mathcal{C}_1$.*

Considerăm că problema enunţată, cu toate cazurile ce le comportă, a fost complet rezolvată.

Cazul unui cerc fix degenerat în dreaptă. Modificăm problema rezolvată mai sus considerând o dreaptă $\mathcal{D}_1$ în locul cercului $\mathcal{C}_1$. Dintre cazurile posibile, potrivit cu poziţia dreptei $\mathcal{D}_1$ faţă de cercul $\mathcal{C}_2$, ne limităm la unul singur, cel din figura alăturată.



Distingem două tipuri de cercuri $\mathcal{C}$ tangente la dreapta $\mathcal{D}_1$ şi cercul $\mathcal{C}_2$: j) $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior; jj) $\mathcal{C}_2$ este tangent interior cercului $\mathcal{C}$. Fie d_1 şi d'_1 paralele la dreapta $\mathcal{D}_1$ situate la distanţa v de aceasta.

În cazul j) avem $OP = r + v = OO_2$, deci punctul mobil O descrie parabola $\mathcal{P}_1$ de focar O_2 şi directoare d_1, iar în cazul jj) avem $O'P' = r' - v = O'O_2$, deci O' descrie parabola $\mathcal{P}_2$ de focar O_2 şi directoare d'_1.

În concluzie, *în cazul considerat, locul centrelor cercurilor tangente la dreapta* $\mathcal{D}_1$ *şi cercul* $\mathcal{C}_2$ *este format din parabolele* $\mathcal{P}_1$ *şi* $\mathcal{P}_2$.

Recreaţii ... matematice

(continuare de la pagina 11)

Când o să-nsereze,
Vor să te-ANULEZE
Funcţia INJECTIVĂ
Şi cea SURJECTIVĂ!
- Dacă s-o-ntâmpla
De m-or ANULA,
Să mă-ngropi în zori
În CÂMP DE VECTORI
Într-o VECINĂTATE
Pe-aici, pe-aproape,
Sau chiar în MULŢIME,
Să fiţi tot cu mine!
Iar la cap să-mi pui
CALCUL INTEGRAL,
Ori un MANUAL,
Sau poate-un TRATAT
Cât mai inspirat ...
Şi de l-or citi
Îşi vor aminti
Cei ce au uitat
Că am existat,
Şi voi fi propusă,
În SUBIECTE inclusă,
Pentru OLIMPIADĂ
Sau BALCANIADĂ ...
Şi-n loc de ANULAT,
Să le spui curat
C-am INTERSECTAT
Mândrele ELIPSE,
Că am PUNCTE FIXE,
RĂDĂCINI REALE
Şi IMAGINARE
Şi că am DARBOUX!
Iar dacă-i zări,
Dacă-i întâlni
O SFERĂ bătrână,
Cu un CERC de lână,
Prin SPAŢIU alergând,
De toţi întrebând
Şi la toţi zicând :
≪Cine mi-a văzut
Sau mi-a cunoscut
O FUNCŢIE - AFINĂ,
Cu o PANTĂ lină,
Bine DEFINITĂ
Şi NEMĂRGINITĂ?...≫
Să te-nduri de ea
Şi să-i spui aşa :
C-am INTERSECTAT
Mândrele ELIPSE,
Că am PUNCTE FIXE,
Rădăcini COMPLEXE
Şi că am DARBOUX ...
Dar nu-i spune tu
De cele REALE,
Că, de-i povesti,
Mult ai s-o mâhneşti
Şi va şti de-ndat
Că m-au ANULAT...
Şi încă te mai rog,
Ca-ntre colegi buni,
Tot ce am avut
Tu să le aduni,
Să le scoţi din SPAŢIUL
Cu trei DIMENSIUNI...
Iar tu, dragul meu,
Să te INTEGREZI,
Să te ANEXEZI
La altă MULŢIME,
Că-i greu fără mine,
Dar îţi va fi bine
şi vei rezista,
Cât va EXISTA
MATEMATICA!