O rafinare a inegalităţii lui Euler $R \geq r\sqrt{2}$

Mihály BENCZE[1]

Pentru un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ şi circumscris unui cerc $\mathcal{C}(I,r)$ este valabilă *relaţia lui Durrande* ([**2**], p.216), din care decurge *inegalitatea de tip Euler* $R \geq r\sqrt{2}$ (cu egalitate dacă şi numai dacă O şi I coincid, ceea ce revine la faptul că patrulaterul este pătrat).

Notând cu S şi p aria şi semiperimetrul unui astfel de patrulater, avem $\sin A = \dfrac{2S}{ad+bc}$, $\sin B = \dfrac{2S}{ab+cd}$ (prima formulă rezultă din $ad\sin A + bc\sin C = 2S$ şi faptul că $A+C=B+D=\pi$). De asemenea au loc relaţiile: $S = \frac{1}{2}(a+b+c+d)r = pr$, $a+c=b+d=p$, $S^2 = abcd$ etc. (v. [**2**]).

Rezultatul următor indică un şir de rafinări ale inegalităţii $R \geq r\sqrt{2}$.

Teoremă. *Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de rază R şi circumscris unui cerc de rază r. Atunci, avem*

$$\begin{aligned}
\frac{r\sqrt{2}}{R} &\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}\right)\\
&\leq \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-D}{2}+\cos\frac{D-A}{2}\right)\\
&\leq \frac{2+\sin A+\sin B}{4} \leq 1.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Ţinând seama de formulele mai sus amintite, obţinem

$$\frac{\sqrt{1+\sin A\sin B}}{\sin A\sin B} = \frac{p(\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)})}{4S^2} = \frac{p\cdot 4RS}{4S^2} = \frac{R}{r}.$$

Ca urmare, $R^2u^2 - r^2u - r^2 = 0$, unde $u = \sin A\sin B$, şi vom avea

$$\sin A\sin B = \frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}.$$

Revenind la scopul propus, să notăm $E = \dfrac{1}{4}\sum\cos\dfrac{A-B}{2}$ şi să observăm că

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{4}\left[\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)^2\right] = \frac{2+\sin A+\sin B}{4} \leq 1.
\end{aligned}$$

[1] Profesor, Braşov, e-mail: benczemihaly@yahoo.com

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{\sin A\sin B}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}}+\frac{r\sqrt{2}}{R}\right) \geq \frac{r\sqrt{2}}{R}
\end{aligned}$$

(s-a utilizat faptul că din $R \geq r\sqrt{2}$ decurge că $\sqrt{\frac{r^2+r\sqrt{4R^2+r^2}}{2R^2}} \geq \frac{r\sqrt{2}}{R}$).

Bibliografie

1. **M. Bencze** - *Inequalities* (manuscript), 1982.
2. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă** - *Geometria patrulaterului. Teoreme şi probleme*, Teora, Bucureşti, 1998.
3. **D.S. Mitrinović** - *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.
4. *Octogon Mathematical Magazine* (1993-2008).

ERRATUM

În articolul *Acurateţea limbajului matematic în combinatorică* de **L. Modan**, apărut în nr. 1 din v. X (2008), în rândul 19 de la pag. 43, în loc de "se formează în $4n^3 - n + 1$ moduri", se va citi "se formează în

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{2n-1}^{k} \cdot C_{2n+1}^{k+1} = \frac{(4n)!}{2\cdot[(2n)!]^2} - 2n - 1$$

moduri".