Asupra inegalităţii lui Jensen

Florin POPOVICI [1]

În această notă stabilim *inegalitatea lui Jensen* pentru funcţii J-convexe; în raport cu demonstraţia lui Cauchy, bazată pe schema $n \to 2^n \to n+1$, raţionamentul nostru inductiv este unul direct şi are un suport geometric natural. Ideea din demonstraţia noastră, prin adaptare, produce demonstraţii simple ale unor inegalităţi clasice; prezentăm o demonstraţie realmente simplă a *inegalităţii mediilor* şi una pentru *inegalitatea lui Huygens.*

1. Inegalitatea lui Jensen

Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie J-convexă (convexă în sens Jensen), adică*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\ (\forall)x_1, x_2 \in I, \tag{1}$$

atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ are loc inegalitatea lui Jensen

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n},\ (\forall)x_1, \ldots, x_n \in I. \tag{2}$$

Demonstraţie. Stabilim (2) prin inducţie. Conform ipotezei, (2) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care are loc (2). Arătăm că (2) are loc şi pentru valoarea $n+1$. Fie $a, b \in I$. Considerăm punctele $c = \dfrac{n}{n+1}a + \dfrac{1}{n+1}b$ şi $d = \dfrac{1}{n+1}a + \dfrac{n}{n+1}b$. Deoarece $c = \dfrac{n-1}{n}a + \dfrac{1}{n}d$ şi $d = \dfrac{n-1}{n}b + \dfrac{1}{n}c$, conform ipotezei inductive rezultă că avem

$$f(c) \leq \frac{n-1}{n}f(a) + \frac{1}{n}f(d),\quad f(d) \leq \frac{n-1}{n}f(b) + \frac{1}{n}f(c). \tag{3}$$

Urmează că

$$f\left(\frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b\right) = f(c) \leq \frac{n}{n+1}f(a) + \frac{1}{n+1}f(b). \tag{4}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (3), obţinem $f\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\dfrac{n}{n+1}\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \dfrac{1}{n+1}x_{n+1}\right) \leq \dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{x_1+\ldots x_n}{n}\right) +$
$+\dfrac{1}{n+1}f(x_{n+1}) \leq \dfrac{n}{n+1}\dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} + \dfrac{1}{n+1}f(x_{n+1}) = \dfrac{f(x_1)+\ldots f(x_{n+1})}{n+1}$, deci (2) are loc pentru valoarea $n+1$. Conform principiului inducţiei matematice, (2) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Observaţia 1. Geometric, din (3) rezultă că nu poate avea loc contrara inegalităţii (4), deoarece s-ar contrazice proprietăţile de separare ale planului $\mathbb{R}^2$.

[1] Prof. dr., Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Braşov

2. Inegalitatea mediilor

Teorema 2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc inegalitatea mediilor*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \ (\forall) x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty). \tag{5}$$

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Deoarece $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, rezultă că (5) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, pentru care are loc (1). Fie $a, b \in [0, \infty)$. Considerăm punctele $c = \sqrt[n+1]{a^n b}$ şi $d = \sqrt[n+1]{ab^n}$. Deoarece $c = \sqrt[n]{a^{n-1} d}$ şi $d = \sqrt[n]{b^{n-1} c}$, conform ipotezei inductive avem $c \leq \frac{(n-1)a + d}{n}$, $d \leq \frac{(n-1)b + c}{n}$. De aici, obţinem succesiv $n^2 c \leq n(n-1)a + nd \leq n(n-1)a + (n-1)b + c$, $(n^2 - 1)c \leq n(n-1)a + (n-1)b$,

$$\sqrt[n+1]{a^n b} \leq \frac{na + b}{n+1}. \tag{6}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, \infty)$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (6), rezultă că

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} &= \sqrt[n+1]{(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n x_{n+1}} \leq \frac{n \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} + x_{n+1}}{n+1} \\ &\leq \frac{n \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_1 + \ldots x_{n+1}}{n+1}; \end{aligned}$$

deci (5) are loc şi pentru valoarea $n + 1$.

Observaţia 2. În [**1**] sunt selectate şi prezentate cronologic circa 40 de demonstraţii ale inegalităţii mediilor, începând cu prima demonstraţie cunoscută, dată de către C. MacLaurin în 1729.

3. Inegalitatea lui Huygens

Teorema 3. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc inegalitatea lui Huygens:*

$$1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \sqrt[n]{(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)}, \ (\forall) x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty). \tag{7}$$

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Deoarece

$$(1 + \sqrt{x_1 x_2})^2 = 1 + 2\sqrt{x_1 x_2} + x_1 x_2 \leq 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)}^2,$$

rezultă că (7) are loc pentru $n = 2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care are loc (7). Fie $a, b \in [0, \infty)$. Considerăm punctele $c = \sqrt[n+1]{a^n b}$ şi $d = \sqrt[n+1]{ab^n}$. Avem $c = \sqrt[n]{a^{n-1} d}$ şi $d = \sqrt[n]{b^{n-1} c}$. Conform ipotezei inductive, rezultă că $1 + c \leq \sqrt[n]{(1 + a)^{n-1}(1 + d)}$, $1 + d \leq \sqrt[n]{(1 + b)^{n-1}(1 + c)}$. De aici, obţinem succesiv

$$(1 + c)^{n^2} \leq (1 + a)^{n(n-1)}(1 + d)^n \leq (1 + a)^{n(n-1)}(1 + b)^{n-1}(1 + c),$$

$$(1+c)^{n^2-1} \leq (1+a)^{n(n-1)}(1+b)^{n-1},$$

$$1+\sqrt[n+1]{a^n b} \leq \sqrt[n+1]{(1+a)^n(1+b)}. \tag{8}$$

Fie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,\infty)$. Conform ipotezei inductive şi ţinând cont de (8), rezultă că $1+\sqrt[n+1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} = 1+\sqrt[n+1]{(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n x_{n+1}}$

$\leq \sqrt[n+1]{(1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})^n(1+x_{n+1})}$

$\leq \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{(1+x_1)\cdot \ldots \cdot (1+x_n)}^n(1+x_{n+1})} = \sqrt[n+1]{(1+x_1)\cdot \ldots \cdot (1+x_{n+1})};$

deci (7) are loc şi pentru valoarea $n+1$.

4. Observaţii finale

Posibilitatea conectării inegalităţii lui Jensen cu alte inegalităţi a fost evidenţiată (cf. [**2**], pag. 4) de către **G. Aumann** în anul 1933, prin introducerea conceptului de *funcţie* (M,N)*-J-convexă.*

Fie $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ două intervale. Fie M o medie pe I_1 şi fie N o medie pe I_2. *O funcţie* $f: I_1 \to I_2$ *se numeşte* (M,N)*-J-convexă dacă* $f(M(x,y)) \leq N(f(x), f(y))$, $(\forall)x,y \in I_1$. În anumite condiţii asupra mediilor M şi N se obţine *inegalitatea lui Jensen generalizată*:

$$f(M(x_1,\ldots,x_n)) \leq N(f(x_1),\ldots,f(x_n)),\ (\forall)x_1,\ldots,x_n \in I_1.$$

Dacă notăm cu A media aritmetică şi cu G media geometrică, atunci:

1) *inegalitatea lui Jensen clasică* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţii $(A,A)-J$-convexe;

2) *inegalitatea mediilor* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţia $(G,A)-J$-convexă $1_{[0,\infty)}$;

3) *inegalitatea lui Huygens* este inegalitatea lui Jensen generalizată pentru funcţia $(G,G)-J$-convexă $x \to 1+x$, $(\forall)x \in [0,\infty)$.

In [**3**], inegalitatea lui Jensen generalizată este stabilită pentru funcţii $(M,N)-J$-convexe, corespunzător unei clase largi de medii, care include mediile cvasi-aritmetice.

Bibliografie

1. **P.S. Bullen, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić** - *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1988.
2. **C.P. Niculescu, L.E. Persson** - *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach.* CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
3. **C.P. Niculescu, F. Popovici** - *Inegalitatea lui Jensen pentru funcţii* $(M,N)-J$*-convexe în condiţii generale* (va apare).
