Drepte concurente în conexiune cu punctele I, Γ, N

Temistocle Bîrsan[1]

1. Notaţii şi teoreme utilizate. Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu D, E, F punctele de tangenţă a cercului înscris $\mathcal{C}(I, r)$ la dreptele BC, CA şi respectiv AB. Cu D_a, E_a, F_a notăm punctele de tangenţă a cercului exînscris $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ cu aceleaşi drepte; notaţii similare relativ la cercurile exînscrise $\mathcal{C}(I_b, r_b)$ şi $\mathcal{C}(I_c, r_c)$. Mai notăm cu L_a, L_b, L_c picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}$ şi respectiv $\widehat{C}$.

Se ştie că *punctul lui Gergonne* (notat Γ) este punctul de concurenţă a dreptelor AD, BE şi CF (numite ceviene Gergonne), iar *punctul lui Nagel* (notat N) este punctul de concurenţă a dreptelor AD_a, BE_b şi CF_c (cevienele Nagel). În sfârşit, punctul Γ_a-unul dintre cele trei *puncte Gergonne adjuncte*–este punctul de intersecţie a dreptelor AD_a, BE_a şi CF_a.

În prezenta notă vom constata că dreptele ce trec prin picioarele unor ceviene şi sunt paralele la altele (dintre cele de mai sus) în cele mai multe din cazurile posibile sunt concurente.

În atingerea scopului, vom prelua neschimbat din **[1]** Propoziţia 2 şi varianta sa, Propoziţia 2′:

Teorema 1. *Dacă poziţiile punctelor M, N, P, Q, R, S din fig. 1 sunt precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$, atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$prs + mq + nr = mrs + np + rq, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & q & rs \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 1′. *Dacă punctele M, N, P, Q, R, S din fig. 2 au poziţiile precizate de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$, $n = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, $p = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$, $q = \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$, $r = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$, $s = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$, atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă avem*

$$qrs + ms + np = nrs + mq + ps, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & rs \\ n & q & s \end{vmatrix} = 0.$$

Următoarele două rezultate sunt consecinţe ale acestora.

Teorema 2. *Fie punctele M, N, P, Q, R, S ca în fig. 3, cu poziţiile date de rapoartele $m = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$, $n = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$, $p = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, $q = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, $r = \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RB}}$ şi $s = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$. Atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$mnp + ms + qr = mnr + mq + ps, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ mn & q & s \end{vmatrix} = 0.$$

[1]Prof. dr., Catedra de matematică, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

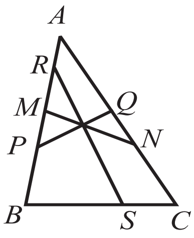

Fig. 1

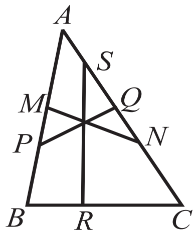

Fig. 2

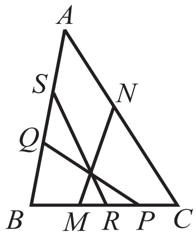

Fig. 3

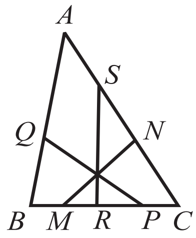

Fig. 4

Teorema 2′. *Fie punctele M, N, P, Q situate ca în fig. 4, cu poziţiile date de* $m = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, $n = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$, $p = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$, $q = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, $r = \frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$, $s = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$. *Atunci dreptele MN, PQ, RS sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$pqm + ps + nr = pqr + pn + ms, \quad \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ n & pq & s \end{vmatrix} = 0.$$

Aceste teoreme sunt forme mai generale ale teoremei lui Ceva şi reciprocei sale. Folosirea segmentelor orientate (marcate prin supraliniere) face posibil ca punctele în discuţie să poată fi situate oriunde pe dreptele suport ale laturilor triunghiului.

2. Paralele la bisectoare. Mai întâi vom antrena bisectoarele interioare.

Propoziţia 1. *Paralelele la bisectoarele AL_a, BL_b, CL_c prin punctele de tangenţă D, E şi respectiv F sunt concurente.*

Demonstraţie. Putem presupune, ca în fig. 5, că $a < c < b$ (se procedează la fel în restul cazurilor). Vom aplica Teorema 2. Avem:

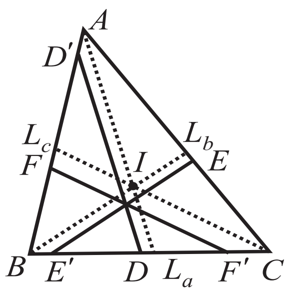

Fig. 5

$$m = \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'B}} = -\frac{E'C}{E'B} = -\frac{EC}{EL_b} = -(p-c)\Big/\left[\frac{ab}{a+c} - (p-c)\right] = \frac{a+c}{a-c} \cdot \frac{p-c}{p-b},$$

$$n = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = -\frac{p-a}{p-c},$$

$$p = \frac{\overline{F'C}}{\overline{F'B}} = -\frac{FL_c}{FB} = -\left[\frac{ac}{a+b} - (p-b)\right]\Big/(p-b) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{p-c}{p-b},$$

$$q = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{p-a}{p-b}, \quad r = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -\frac{p-c}{p-b},$$

$$s = \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B}} = -\frac{DL_a}{DB} = -\left[\frac{ac}{b+c} - (p-b)\right]\Big/(p-b) = -\frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{p-a}{p-b}.$$

Condiţia de concurenţă din Teorema 2 sub formă de determinant revine la

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{a+c}{a-c}\cdot\dfrac{p-c}{p-b} & \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{p-c}{p-b} & -\dfrac{p-c}{p-b} \\ -\dfrac{a+c}{a-c}\cdot\dfrac{p-a}{p-b} & -\dfrac{p-a}{p-b} & -\dfrac{b-c}{b+c}\cdot\dfrac{p-a}{p-b} \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (a-c)(p-b) & (a+b)(p-b) & (b+c)(p-b) \\ (a+c)(p-c) & (a-b)(p-c) & -(b+c)(p-c) \\ -(a+c)(p-a) & -(a+b)(p-a) & -(b-c)(p-a) \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce este adevărat, întrucât prima coloană este diferenţa celorlalte două. Aşadar, dreptele DD', EE' şi FF' sunt concurente.

Observaţie. Cititorul poate evita calculul cu determinanţi utilizând condiţia explicitată din Teorema 2.

Propoziţia 2. *Paralelele prin D_a, E_b, F_c la bisectoarele interioare AL_a, BL_b şi respectiv CL_c sunt concurente.*

Demonstraţie. Ne limităm, din nou, la cazul $a < c < b$. Vom aplica Teorema $1'$ relativ la dreptele D_aD', E_bE' şi F_cF'. Avem:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\overline{F_cB}}{\overline{F_cA}} = -\frac{p-a}{p-b}, \\ n &= \frac{\overline{F'C}}{\overline{F'A}} = -\frac{F_cL_c}{F_cA} = -\left[\frac{bc}{a+b} - (p-b)\right] \Big/ (p-b) \\ &= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{p}{p-b}, \\ p &= \frac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\frac{E_bL_b}{E_bA} = -\left[\frac{bc}{a+c} - (p-c)\right] \Big/ (p-c) \\ &= \frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{p}{p-c}, \\ q &= \frac{\overline{E_bC}}{\overline{E_bA}} = -\frac{p-a}{p-c}, \quad r = \frac{\overline{D_aB}}{\overline{D_aC}} = -\frac{p-c}{p-b}, \\ s &= \frac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}} = -\frac{D_aC}{D_aL_a} = -(p-b) \Big/ \left[\frac{ab}{b+c} - (p-b)\right] = \frac{c+b}{c-b}\cdot\frac{p-b}{p}. \end{aligned}$$

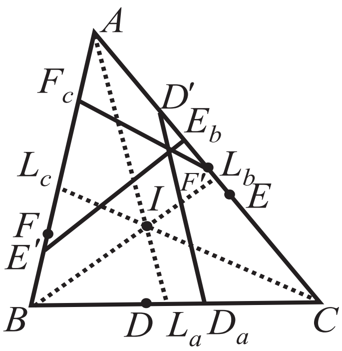

Fig. 6

În acest caz, condiţia din Teorema $1'$ se scrie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\dfrac{p-a}{p-b} & \dfrac{a-c}{a+c}\cdot\dfrac{p}{p-c} & -\dfrac{c+b}{c-b}\cdot\dfrac{p-c}{p} \\ \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{p}{p-b} & -\dfrac{p-c}{p-b} & \dfrac{c+b}{c-b}\cdot\dfrac{p-b}{p} \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (a+b)(p-b) & (a+c)(p-c) & (c-b)p \\ -(a+b)(p-a) & (a-c)p & -(b+c)(p-c) \\ (a-b)p & -(a+c)(p-a) & (b+c)(p-b) \end{vmatrix} = 0,$$

egalitate adevărată, prima coloană fiind suma celorlalte două (calcule de rutină!). Deci, dreptele D_aD', E_bE', F_cF' sunt concurente.

Relativ la punctul Gergonne adjunct Γ_a are loc rezultatul următor:

Propoziţia 3. *Paralelele prin punctele D_a, E_a, F_a (de tangenţă a cercului $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ la bisectoarea interioară AI, bisectoarea exterioară BI_a şi, respectiv, bisectoarea exterioară CI_a sunt concurente.*

Demonstraţie. Vom aplica Teorema 1′. Mai întâi, observăm că $m(\widehat{E_aE'F_a}) = m(\widehat{I_aBF_a}) = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$. Ca urmare, $m(\widehat{AE'E_a}) = 90^\circ + \dfrac{B}{2}$ şi $m(\widehat{AE_aE'}) = \dfrac{C-A}{2}$. În $\triangle AE'E_a$ avem: $AE' = \sin\dfrac{C-A}{2}\cdot\dfrac{p}{\sin(90^\circ+\frac{B}{2})} = p\cdot\dfrac{\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{(c-a)p}{b}$. Rezultă că $BE' = c - AE' = \dfrac{(a+c)(p-c)}{b}$ (după calcule!). Analog găsim: $AF' = \dfrac{(b-a)p}{c}$ şi $CF' = \dfrac{(a+b)(p-b)}{c}$.

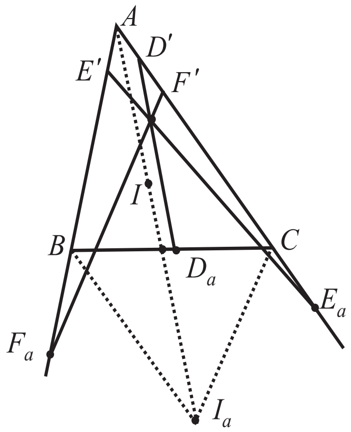

Fig. 7

Cu aceste pregătiri, obţinem: $m = \dfrac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} = -\dfrac{E'B}{E'A} = -\dfrac{c+a}{c-a}\cdot\dfrac{p-c}{p}$, $n = \dfrac{\overline{E_aC}}{\overline{E_aA}} = \dfrac{p-b}{p}$, $p = \dfrac{\overline{F_aB}}{\overline{F_aA}} = \dfrac{p-c}{p}$, $q = \dfrac{\overline{F'C}}{\overline{F'A}} = +\dfrac{a+b}{a-b}\cdot\dfrac{p-b}{p}$, $r = \dfrac{\overline{D_aB}}{\overline{D_aC}} = -\dfrac{p-c}{p-b}$, $s = \dfrac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}} = -\dfrac{D_aC}{D_aL_a} = -\dfrac{b+c}{b-c}\cdot\dfrac{p-b}{p}$. Condiţia de concurenţă din Teorema 1′ se verifică imediat. În concluzie, dreptele D_aD', E_aE' şi F_aF' sunt concurente.

Dacă rolul bisectoarelor ar fi luat de cevienele Gergonne sau de cele Nagel, nu obţinem concurenţa paralelelor la acestea decât pentru triunghiuri particulare. Cititorul poate stabili, utilizând teoremele din secţiunea **1**, următoarele rezultate:

Propoziţia 4. *Paralelele duse prin picioarele L_a, L_b, L_c ale bisectoarelor interioare la cevienele Gergonne AD, BE şi respectiv CF sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel.*

Propoziţia 5. *Paralelele prin punctele L_a, L_b, L_c la cevienele Nagel AD_a, BE_b şi respectiv CF_c sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel.*

3. Paralele prin puncte izotomice. Două puncte situate pe dreapta suport a unui segment $[AB]$ se numesc *izotomice* dacă sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ($A' \in BC$ etc.).

Teoremă. *Fie AA_1, BB_1, CC_1 trei ceviene concurente în punctul X şi A_2, B_2, C_2 izotomicele punctelor A_1, B_1 şi respectiv C_1.*

1) *Paralelele prin punctele* A_2, B_2, C_2 *la cevienele* AA_1, BB_1 *şi respectiv* CC_1 *sunt concurente într-un punct* Y.

2) *Paralelele prin mijloacele* A', B', C' *la cevienele* AA_1, BB_1 *şi respectiv* CC_1 *sunt concurente în mijlocul* Z *al segmentului* $[XY]$.

Demonstraţie. Notăm $\alpha = \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$, $\beta = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$, $\gamma = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$; prin ipoteză, $\alpha\beta\gamma = -1$. Fie $a < c < b$, ca în fig. 8. Aplicăm Teorema 1 dreptelor $A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2'$. Cu uşurinţă găsim:

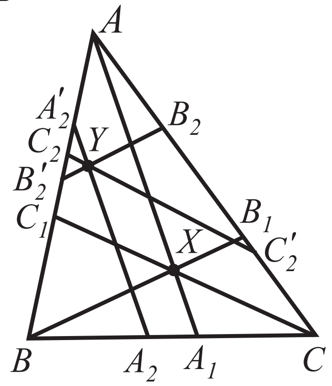

Fig. 8

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = \gamma,\\
n &= \frac{\overline{C_2'C}}{\overline{C_2'A}} = \frac{\overline{C_2C_1}}{\overline{C_2A}} = \frac{\overline{C_2B}}{\overline{BC_1}} + 1 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} + 1 = \gamma + 1,\\
p &= \frac{\overline{B_2'B}}{\overline{B_2'A}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{B_2A}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}} + 1 = \frac{1}{\beta} + 1,\\
q &= \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{1}{\beta},\\
r &= \frac{\overline{A_2'B}}{\overline{A_2'A}} = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2A_1}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_2C} - \overline{A_1C}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1} + \overline{CA_1}} = \frac{1}{\alpha + 1},\\
s &= \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = \alpha.
\end{aligned}$$

Excludem cazul degenerat $\beta = 0$, iar cazul particular $\alpha + 1 = 0$ (adică ceviana AA_1 este mediană) se tratează separat la fel. Cum

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & p & r \\ mn & q & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma & \dfrac{1}{\beta} + 1 & \dfrac{1}{\alpha + 1} \\ \gamma + 1 & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha + 1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta(\alpha + 1)} \begin{vmatrix} 1 & \beta & \alpha + 1 \\ \gamma & \beta + 1 & 1 \\ \gamma + 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

(ultima egalitate obţinându-se dezvoltând determinantul), rezultă că afirmaţia punctului 1) este dovedită.

Pentru 2) am putea proceda la fel. Mai simplu, observăm că A', B', C' sunt mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ şi $[C_1C_2]$. Atunci, în fiecare dintre trapezele AA_1A_2A', BB_1B_2B', CC_1C_2C' paralelele la baze prin A', B' şi respectiv C' vor trece prin mijlocul segmentului $[XY]$.

Cititorul poate particulariza acest rezultat considerând diferite triplete de ceviene remarcabile în triunghi; altfel spus, considerând în locul lui X puncte ca H, O, I etc.

Se ştie că (D, D_a) şi (D_b, D_c) sunt perechi de puncte izotomice pe $[BC]$; analog şi pe celelalte două laturi (v. **[3]**, p.31). Se obţin direct următoarele:

Propoziţia 6. *Dreptele ce trec prin punctele de tangenţă* D, E, F (*sau prin mijloacele laturilor* A', B', C') *şi sunt paralele cu cevienele Nagel corespunzătoare* AD_a, BE_b, CF_c *sunt concurente. Punctul Nagel* N *şi cele două puncte de concurenţă rezultate sunt coliniare.*

Propoziţia 7. *Paralelele prin punctele D_a, E_b, F_c (sau prin mijloacele A', B', C') la cevienele Gergonne corespunzătoare sunt concurente. Punctul Gergonne Γ şi punctele de concurenţă rezultate sunt coliniare.*

4. Comentariu. Cu un efort suplimentar, am putea identifica unele puncte de concurenţă mai sus obţinute şi vedea că ele sunt puncte remarcabile în triunghi. Calea de urmat poate fi următoarea: se calculează coordonatele triliniare/baricentrice ale punctelor de concurenţă (ceea ce nu-i greu!) şi apoi se găseşte în lista ,,centrelor" din [**2**] cine sunt aceste puncte. De exemplu, punctul de concurenţă dat de Propoziţia 1 este notat X_{65} în [**2**], p.76, şi dintre proprietăţile indicate în acest loc enumerăm: se află pe dreptele OI şi ΓN, este izogonalul conjugat al punctului lui Schiffler etc.

Bibliografie

1. **T. Bîrsan** - *Generalizări ale teoremei lui Ceva şi aplicaţii*, Recreaţii Matematice, 4(2002), nr. 2, 10-14.
2. **C. Kimberling** - *Triangle Centers and Central Triangle*, Congressus Numerantium 129, Winnipeg, Canada, 1998.
3. **T. Lalescu** - *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.

Recreaţii ... matematice

MIORIŢA MATEMATICĂ

Pe-un picior de
PLAN EUCLIDIAN,
Iată vin în cale,
TRANSLATÂND la vale,
Trei MULŢIMI de
PUNCTE,
Toate trei DISJUNCTE,
De FUNCŢII păzite
Toate diferite.
Ele sunt tot trei:
Una-i INJECTIVĂ,
Alta-i BIJECTIVĂ
Şi-alta-i SURJECTIVĂ.
Iar cea INJECTIVĂ
Şi cea SURJECTIVĂ,
Mări, se vorbiră
Şi se sfatuiră
Să rămână treze
Pân-o să-nsereze
Şi s-o ANULEZE
Pe cea BIJECTIVĂ,
C-are PRIMITIVĂ
Şi- ASIMPTOTE multe
Câte şi mai câte,
Că e INVERSABILĂ
Şi chiar DERIVABILĂ ...
Dar într-o MULŢIME
Asta s-a aflat
Şi s-au indignat,
C-ale lor cuvinte
Întrec orice LIMITE.
Dar de la $f(0)$-ncoace
Unui PUNCT nu-i place
Să mai stea-n MULŢIME
Şi de treabă-a se ţine.
BIJECTIVA se-ntrebă:
"PUNCTUL ăsta ce-o
avea?"
Şi se duse
Şi îi spuse:
- Dragă PUNCTULEŢUL
meu,
Ce rău oare îţi fac eu
Sau nu-ţi place poate
C-ai COORDONATE
NATURALE toate?
Vrei să stai mai jos,
Crezi că-i mai frumos?
Nu vrei un'te-am pus,
Vrei cumva mai sus?
- Dragă BIJECTIVĂ,
Eu chiar dimpotrivă,
Mă simt foarte bine,
Dar e rău de tine!

(continuare la pagina 20)