

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G326. Pentru a-și face provizii pentru iarnă, spiridușii trebuie să culeagă ciuperci din pădure. Ciupercile cresc în 2017 poienițe, însă în una dintre acestea toate ciupercile sunt otrăvite, otrava acționând după o zi. Vrăciul are exact 10 doze de poțiune, cu ajutorul cărora poate vindeca 10 spiriduși care au mâncat o ciupercă otrăvită. Cum pot proceda spiridușii pentru a identifica poienița blestemată?

Armand Anușcă-Popa, elev, Iași

G327. Demonstrați că există numere naturale care sunt pătrate perfecte și au suma cifrelor 2017.

Dan Popescu, Suceava

G328. Arătați că nu există numere naturale x, y, z, t cu proprietatea că $x^{2016} + y^{2016} + z^{2016} - t^{2016} = 2017$.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureș)

G329. Determinați numerele naturale nenule p cu proprietatea că $\left[\sum_{k=1}^p \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}} \right] = pn$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. (Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a .)

Ovidiu Pop, Satu Mare

G330. Pentru a, b, c, d reale pozitive cu $abcd = 1$, demonstrați inegalitatea $\frac{1}{ab+bc+ca+1} + \frac{1}{bc+cd+db+1} + \frac{1}{cd+da+ac+1} + \frac{1}{da+ab+bd+1} \leq 1$.

Veronica Huiban, Bârlad și Cătălin Calistru, Iași

G331. Determinați valoarea maximă a expresiei

$$E = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} + x + y + z,$$

când numerele reale x, y și z parcurg intervalul $[-1, 1]$.

Nguyen Viet Hung, Hanoi

G332. Cercul de centru I este tangent laturilor triunghiului ABC în punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Pe latura BC se consideră punctul E astfel încât $\widehat{BEB_1} \equiv \widehat{C_1B_1A}$. Dacă $\{X\} = EB_1 \cap A_1I$ și $\{Y\} = XC_1 \cap BC$, arătați că patrulaterul YCB_1C_1 este inscriptibil.

Mihaela Berindeanu, București

G333. Fie triunghiul ABC înscris în cercul \mathcal{C} . Cercul \mathcal{C}_1 este tangent cercului \mathcal{C} și segmentelor $[AB]$ și $[BC]$ în punctele M, L și respectiv K . Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AML și CMK trec prin centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Neculai Roman, Mircești, Iași

G334. Fie dat un triunghi ABC și fie M_a, H_a și L_a intersecțiile cercului său circumscris cu dreptele suport ale medianei, înălțimii, respectiv bisectoarei ce corespund vârfului A . Reținem în planul figurii punctele M_a, H_a, L_a și ștergem celelalte elemente. Să se reconstruiască triunghiul ABC utilizând rigla și compasul.

Temistocle Bîrsan, Iași

G335. Fie $ABCD$ un tetraedru și punctele arbitrare $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$, $R \in (BD)$ și $S \in (CD)$. Notăm cu X, Y, Z și T centrele de greutate ale triunghiurilor MNP , MQR , NQS , respectiv PRS . Arătați că $\mathcal{V}_{XBCD} + \mathcal{V}_{YACD} + \mathcal{V}_{ZABD} + \mathcal{V}_{TABC} = 2\mathcal{V}_{ABCD}$. (În legătură cu problema E:15144 din *Gazeta Matematică 2/2017*.)

Mihai Miculița, Oradea

A. Nivel liceal

L326. Fie ABC un triunghi dreptunghic înscris în cercul \mathcal{C} și D piciorul înălțimii din vârful unghiului drept A . Cercurile \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 și \mathcal{C}_3 de raze r_1, r_2 și, respectiv, r_3 tangente interior cercului \mathcal{C} mai sunt tangente și segmentelor $[AD]$ și $[BD]$, $[AD]$ și $[CD]$ și, respectiv, $[AB]$ și $[AC]$. Arătați că $r_1 + r_2 = r_3$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L327. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA, AB în punctele D, E , respectiv F . Să se demonstreze că, dacă ortocentrul triunghiului DEF aparține înălțimii din A a triunghiului ABC , atunci triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic. (O reciprocă a problemei M2447 din *Kvant 1/2017*.)

Titu Zvonaru, Comănești

L328. Fie ABC un triunghi oarecare și Ortocentrul său. Notăm cu E_a mijlocul segmentului AH și cu H_a proiecția punctului H pe latura BC ; analog se introduc punctele E_b, H_b, E_c, H_c . Notăm $\{A_1\} = E_bH_c \cap E_cH_b$, $\{B_1\} = E_cH_a \cap E_aH_c$ și $\{C_1\} = E_aH_b \cap E_bH_a$. Arătați că

1) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului dat și

2) punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.

Petru Braica, Satu Mare

L329. Dacă w_a, w_b și w_c sunt lungimile bisectoarelor unui triunghi ABC , demonstrați că

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești și Marius Drăgan, București

L330. Cu notațiile uzuale într-un triunghi, arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{p^2}{9r^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

L331. Demonstrați că, într-un tetraedru $ABCD$, sunt adevărate inegalitățile:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{h_a - \alpha r}{h_a + \alpha r} + \frac{h_b - \alpha r}{h_b + \alpha r} + \frac{h_c - \alpha r}{h_c + \alpha r} + \frac{h_d - \alpha r}{h_d + \alpha r} \geq 4 \cdot \frac{4 - \alpha}{4 + \alpha}, \alpha \in [0, 3]; \\ \text{b)} \quad & \frac{r_a - \beta r}{r_a + \beta r} + \frac{r_b - \beta r}{r_b + \beta r} + \frac{r_c - \beta r}{r_c + \beta r} + \frac{r_d - \beta r}{r_d + \beta r} \geq 4 \cdot \frac{2 - \beta}{2 + \beta}, \beta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nicușor Zlota, Focșani

L332. Să se demonstreze că, dacă $a, b, c > 0$, este adevărată inegalitatea

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc + \frac{(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

L333. Fie s un număr real din intervalul $[-1, 1]$, iar a, b, c, d numere reale astfel încât $\sum a = 4s$ și $\sum a^2 = 4$. Notăm cu M_s valoarea maximă a expresiei $E = (\sum a) - (\sum abc)$. Determinați $\min\{M_s \mid s \in [-1, 1]\}$.

Leonard Giugiu, Drobeta-Turnu Severin și Marian Cucoaneș, Mărășești

L334. Determinați funcția monotonă $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, știind că $f(0) \in \mathbb{Z}$ și că există o primitivă $F : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ a lui f astfel încât $F(x - y) - F(x)F(y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu $x - y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Florin Stănescu, Găești

L335. Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(f(f(x))) - f(f(x)) - f(x) - 2x = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior Level

G326. In order to make supplies for the winter, the elves must collect mushrooms from the forest. Mushrooms grow in 2017 small glades, but in one of these all mushrooms are poisoned, poisoning acting after a day. The quack has exactly 10 doses of a potion to help heal 10 elves that ate a poisonous mushroom. How can the elves work to identify the cursed glade?

Armand Anușcă-Popa, student, Iași

G327. Prove that there are natural numbers that are perfect squares having 2017 as the sum of their figures.

Dan Popescu, Suceava

G328. Prove that natural numbers x, y, z, t with the property $x^{2016} + y^{2016} + z^{2016} - t^{2016} = 2017$ do not exist.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureș)

G329. Determine the non-null natural numbers p such that $\left[\sum_{k=1}^p \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}} \right] = pn$, for all $n \in \mathbb{N}$. ($[a]$ denotes the integer part of the real number a .)

Ovidiu Pop, Satu Mare

G330. Prove the inequality $\frac{1}{ab + bc + ca + 1} + \frac{1}{bc + cd + db + 1} + \frac{1}{cd + da + ac + 1} + \frac{1}{da + ab + bd + 1} \leq 1$ for a, b, c, d positive real numbers satisfying $abcd = 1$

Veronica Huiban, Bârlad and Cătălin Calistru, Iași

G331. Determine $\max E$, where

$$E = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} + x + y + z,$$

when the real numbers x, y, z belong to the interval $[-1, 1]$.

Nguyen Viet Hung, Hanoi

G332. The circle of center I is tangent to the sides of the triangle ABC in the points $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. On the side BC one considers the point E such that $\widehat{BEB_1} \equiv \widehat{C_1B_1A}$. If $\{X\} = EB_1 \cap A_1I$ and $\{Y\} = XC_1 \cap BC$, prove that the quadrilateral YCB_1C_1 is inscribable.

Mihaela Berindeanu, București

G333. Let ABC be a triangle inscribed in the circle \mathcal{C} . The circle \mathcal{C}_1 is tangent to the circle \mathcal{C} and to the segments $[AB]$ and $[BC]$ in the points M, L and K , respectively. Show that the circles circumscribed to the triangles AML and CMK passes through the center of the circle inscribed in the triangle ABC .

Neculai Roman, Mircești, Iași

G334. Given a triangle ABC let M_a, H_a and L_a be the intersections of its circumscribed circle with the straight lines supporting the median, the altitude and the bisector corresponding to the vertex A . We keep in the plane of this figure the points M_a, H_a, L_a and we delete the other elements. Reconstruct the triangle ABC using a ruler and a compass.

Temistocle Bîrsan, Iași

G335. Let $ABCD$ a tetrahedron and the arbitrary points $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$, $R \in (BD)$ and $S \in (CD)$. Denote by X, Y, Z and T the gravity centers of the triangles MNP , MQR , NQS , PRS , respectively. Show that $\mathcal{V}_{XBCD} + \mathcal{V}_{YACD} + \mathcal{V}_{ZABD} + \mathcal{V}_{TABC} = 2\mathcal{V}_{ABCD}$.

(Related to the problem E:15144 from *Gazeta Matematică* 2/2017.)

Mihai Miculița, Oradea

B. Senior Level

L326. Let ABC be a right triangle inscribed in the circle \mathcal{C} and D be the foot of the altitude from the vertex of the right angle A . The circles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 și \mathcal{C}_3 of radii r_1, r_2, r_3 , respectively which are interior tangent to the circle \mathcal{C} are also tangent to the segments $[AD]$ and $[BD]$, $[AD]$ and $[CD]$, $[AB]$ and $[AC]$, respectively. Show that $r_1 + r_2 = r_3$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L327. The circle inscribed in the triangle ABC is tangent to the sides BC, CA, AB in the points D, E, F , respectively. Prove that, if the orthocenter of the triangle DEF belongs to the altitude from A of the triangle ABC , then the triangle ABC is an isosceles or a right triangle.

(A converse of the problem M2447 from *Kvant* 1/2017.)

Titu Zvonaru, Comănești

L328. Let ABC a triangle and H its orthocenter. Let E_a be the middle of the segment AH and H_a be the projection of the point H on the side BC ; similarly one introduces the points E_b, H_b, E_c, H_c . One sets $\{A_1\} = E_bH_c \cap E_cH_b$, $\{B_1\} = E_cH_a \cap E_aH_c$ și $\{C_1\} = E_aH_b \cap E_bH_a$. Show that:

1) the straight lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent in the center of the Euler circle of the given triangle, and that

2) the points A_1, B_1, C_1 are collinear.

Petru Braica, Satu Mare

L329. If w_a, w_b and w_c are the length of the bisectors of a triangle ABC , prove that

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești and Marius Drăgan, București

L330. Using the usual notations for a triangle, prove that $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{p^2}{9r^2}$.

Marin Chirciu, Pitești

L331. Prove that, in a tetrahedron $ABCD$, the following inequalities are true:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{h_a - \alpha r}{h_a + \alpha r} + \frac{h_b - \alpha r}{h_b + \alpha r} + \frac{h_c - \alpha r}{h_c + \alpha r} + \frac{h_d - \alpha r}{h_d + \alpha r} \geq 4 \cdot \frac{4 - \alpha}{4 + \alpha}, \alpha \in [0, 3]; \\ \text{b) } & \frac{r_a - \beta r}{r_a + \beta r} + \frac{r_b - \beta r}{r_b + \beta r} + \frac{r_c - \beta r}{r_c + \beta r} + \frac{r_d - \beta r}{r_d + \beta r} \geq 4 \cdot \frac{2 - \beta}{2 + \beta}, \beta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nicușor Zlota, Focșani

L332. Prove that, if $a, b, c > 0$, the following inequality

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc + \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

holds.

Titu Zvonaru, Comănești

L333. Let s be a real number from the interval $[-1, 1]$, and a, b, c, d be real numbers such that $\sum a = 4s$ and $\sum a^2 = 4$. Set $M_s = \max E$, where $E = (\sum a) - (\sum abc)$. Determine $\min\{M_s \mid s \in [-1, 1]\}$.

Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr.Severin and Marian Cucoaneș, Mărășești

L334. Determine the monotone function $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, knowing that $f(0) \in \mathbb{Z}$ and there exists a primitive of it, $F : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ such that $F(x - y) - F(x)F(y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ and $x - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Florin Stănescu, Găești

L335. Determine the continuous functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that the equation

$$f(f(f(x))) - f(f(x)) - f(x) - 2x = 0,$$

holds for any $x \in \mathbb{R}$.

Marian Tetiva, Bârlad

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacția revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **anastas@uaic.ro** și **profpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacția un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numereze și să-și rețină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu ușurință o discuție prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacția revistei.
- La *problemele de tip L* se primesc soluții de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluțiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistență rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise și altor publicații.**
- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacției însoțite de fișierele lor (de preferință în \LaTeX).
- Pentru a facilita comunicarea redacției cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugați să indice adresa e-mail.