Probleme propuse[1]

Clasele primare

P387. Într-o farfurie sunt patru mere şi şapte pere. Se consumă cinci fructe. Pot rămâne pe farfurie patru pere? Justificaţi!
(*Clasa pregătitoare*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P388. Un elev de la clasa pregătitoare observă şi reţine următoarele imagini: un elev intră în curtea şcolii, un copil jucându-se în parc, un elev aşezat în bancă şi un copil privind cerul cu stele. Precizaţi ordinea derulării evenimentelor din aceste imagini într-o zi.
(*Clasa pregătitoare*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

P389. O pâine costă 1 leu şi 50 bani, iar o carte costă cât şase pâini şi jumătate. Cât costă o carte?
(*Clasa I*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P390. O veveriţă duce ghinde la două scorburi vecine. La fiecare transport ea duce trei ghinde. După câte transporturi sunt câte nouă ghinde în fiecare scorbură?
(*Clasa I*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

P391. Un vehicul se deplasează, pe rând, în următoarele direcţii: înainte, stânga, înapoi, stânga, înainte, dreapta, înainte, stânga ş.a.m.d. Cum se deplasează vehiculul la a treisprezecea schimbare de direcţie?
(*Clasa I*) **Maria Crăcană, elevă, Iaşi**

P392. Scrieţi numărul 55 utilizând de şase ori cifra 2.
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P393. Arataţi că suma tuturor numerelor formate din două cifre cu suma 9 se împarte exact la 9.
(*Clasa a II-a*) **Mădălina Baciu, elevă, Iaşi**

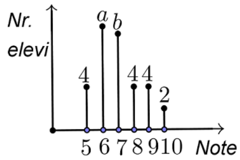
P394. Trei fraţi s-au născut la diferenţă de 1 an şi 6 luni, al doilea faţă de primul cât şi al treilea faţă de al doilea. Peste câţi ani vor avea, împreună, 19 ani şi 6 luni?
(*Clasa II-a*) **Mădălina Apopei, elevă, Iaşi**

P395. Arătaţi că numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se împarte exact la 3.
(*Clasa a III-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

P396. În şase pungi sunt 38 bomboane roşii, verzi, albastre şi portocalii. Ştiind că în fiecare pungă sunt bomboane de toate culorile, să se arate că există cel puţin două pungi cu acelaşi număr de bomboane.
(*Clasa a III-a*) **Sînziana Huţanu, elevă, Iaşi**

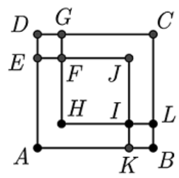
[1]Se primesc soluţii până la data de 20 ianuarie 2018.

P397. La un concurs de matematică au participat 33 elevi de clasa a III-a. Rezultatele sunt date în graficul cu coloane alăturat. Ştiind că 14 elevi au luat cel mult nota 6, să se afle câţi elevi au luat nota 6 sau nota 7.



(*Clasa a III-a*) **Gabriela Timofte, elevă, Iaşi**

P398. In configuraţia geometrică alăturată, patrulaterele $ABCD$, $DEFG$, $FHIJ$, $IKBL$ sunt pătrate. Arătaţi că suma perimetrelor pătratelor $DEFG$, $FHIJ$ şi $IKBL$ este egală cu perimetrul pătratului $ABCD$.



(*Clasa a III-a*) **Adelin Nicolae Bechet, elev, Iaşi**

P399. Două feţe opuse ale unui cub pot fi acoperite cu pătrate de latură 1 cm, alte două feţe opuse pot fi acoperite cu pătrate de latura 2 cm, iar celelalte două feţe opuse pot fi acoperite cu pătrate de latură 3 cm. Arătaţi că suma lungimilor tuturor muchiilor cubului nu poate fi 96 cm.

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P400. În clasa a IV-a elevii învaţă 12 discipline. La sfârşitul anului şcolar, elevii clasei a IV-a A au avut un total de 241 calificative FB anuale, pe discipline, iar cei din clasa a IV-a B au avut 239 de FB. Premiul întâi s-a acordat numai elevilor care au avut calificativul FB la toate disciplinele. Care clasă a avut şansa să aibă cele mai multe premii întâi?

(*Clasa a IV-a*) **Bianca Ţugui, elevă, Iaşi**

P401. Numerele a, b, c şi d îndeplinesc egalităţile $a+b+c+d=15$ şi $2a+2b+4c+d=30$. Să se arate că $a+b$ se împarte exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Cristina Ionela Chelaru, elevă, Iaşi**

P402. Să se afle numerele naturale a, b, c ştiind că au loc egalităţile: $a+b+c=48$, $2a-2b=2b-c=2c+b-a$.

(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.221. Demonstraţi că fracţia $\dfrac{3^{2016}+3^{2017}}{5^{2018}}$ este ireductibilă.

Tinuţa Bejan, Iaşi

V.222. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care fracţia $\dfrac{2n^2-n+6}{3n^2+n+5}$ se simplifică prin 17.

Vasile Chiriac, Bacău

V.223. Demonstraţi că nu există numere naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{ab}\cdot c=\overline{abc}$ sau cu proprietatea $\overline{ab}\cdot c=\overline{acb}$, dar există numere $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{ab}\cdot c=\overline{bac}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

V.224. Determinaţi numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $2^a\cdot 3^b\cdot 7^c+d=2017$.

Cătălin Calistru, Iaşi şi Veronica Huiban, Bârlad

V.225. Prin împărţirea numărului $\overline{ab}$ la un multiplu comun al numerelor a şi b se obţine un cât c egal cu restul, $c\geq 2$. Determinaţi $\overline{ab}$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

V.226. Demonstraţi că $\underbrace{44...4}_{2n\text{ cifre}}-\underbrace{88...8}_{n\text{ cifre}}=\underbrace{44...4}_{n-1\text{ cifre}}3\underbrace{55...5}_{n-1\text{ cifre}}6.$

Radu Ghenghiu, Oradea

V.227. Se pot ordona numerele $1,2,3,...,100$ astfel încât suma oricăror zece numere consecutive să se dividă cu 9?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Clasa a VI-a

VI.221. Determinaţi numerele prime p şi q care verifică relaţia $p^3q^3=p^3+3q^3+127$.

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

VI.222. Numerele raţionale pozitive x,y,z,t sunt astfel încât $\frac{x}{1+x}=\frac{y}{2+y}=\frac{z}{3+z}=\frac{t}{4+t}$ şi $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{4}{t}=\frac{1}{6}$. Calculaţi $4x+3y+2z+t$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

VI.223. Trei numere naturale x,y şi z nu au niciun factor prim comun şi satisfac relaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Arătaţi că $x+y$ este pătrat perfect.

Viorica Momiţă, Iaşi

VI.224. Demonstraţi că fracţia $F=\frac{31^{2017}-5}{31^{2017}-18}$ este reductibilă.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

VI.225. Determinaţi numerele naturale x,y şi z pentru care $2018^x-y^{2018}=2017^z$.

Cecilia Deaconescu, Piteşti şi Radu Deaconescu, student, Piteşti

VI.226. În triunghiul isoscel ABC, $AB=AC$, se consideră bisectoarea $BE, E\in AC$ şi punctul P pe segmentul BC astfel încât $PE=PC$. Ştiind că triunghiul BEP este isoscel, determinaţi măsura unghiului $\widehat{ABC}$.

Mirela Marin, Iaşi

VI.227. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ intersectează latura AC în D şi perpendiculara în C pe BC în E. Bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$ intersectează dreapta AB în P. Dacă $AD + DP = AB$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{B}$.

Cătălin Cristea, Craiova

Clasa a VII-a

VII.221. Un program lucrează cu triplete de numere naturale şi face două operaţii:

I. transformă tripletul (a, b, c) în $(a + 1, b + 1, c + 1)$;

II. transformă tripletul (a, b, c) în $(a + 1, b + 3, c + 5)$.

Este posibil ca, plecând de la tripletul $(1, 2, 3)$, să se obţină, după un număr de paşi, un triplet de forma (x, y, y)?

Cătălin Budeanu, Iaşi

VII.222. Fie a, b, c trei numere naturale şi $n = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$. Demonstraţi că $x = \sqrt{2017^n}$ este număr raţional.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

VII.223. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N = (1!)^2 \cdot 1 \cdot 3 + (2!)^2 \cdot 2 \cdot 4 + ... + (n!)^2 \cdot n(n + 2)$ este pătrat perfect.

Alessandro Ventullo, Milano

VII.224. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, iar punctele P şi Q se află pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât $PQ \parallel AM$. Dacă N este simetricul lui P faţă de Q, demonstraţi că $BN \parallel AC$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.225. Se consideră punctul A, dreapta d care nu trece prin A şi notăm cu D proiecţia lui A pe d. Arătaţi că, oricare ar fi punctul M din plan şi oricare ar fi N pe dreapta d, este adevărată inegalitatea $2(MA^2 + MN^2) \geq AD^2$.

Constantin Petrea, Paşcani

VII.226. Pe laturile AB şi BC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $BM \neq BN$. Perpendiculara în M pe MN intersectează latura AD în P, iar perpendiculara în N pe MN intersectează latura CD în Q. Ştiind că triunghiul DPQ este isoscel, arătaţi că $\mathcal{P}_{BMN} = \mathcal{P}_{AMP} + \mathcal{P}_{CNQ}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VII.227. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB = 2b$ şi $CD = 2a$, $b > a$. Punctele M şi N sunt mijloacele bazelor. Dacă $MN = b - a$, arătaţi că unghiul $\widehat{ADB}$ nu poate fi drept.

Marian Ciuperceanu şi Lucian Tuţescu, Craiova

Clasa a VIII-a

VIII.221. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ ecuaţia $26x^2 + 101y^2 + 100xy - 8x + 4y + 20 = 0$.

Bogdan Chiriac, Bacău

VIII.222. Dacă $n \geq 2$ este un număr natural, arătaţi că

$$2n\left[\sqrt{4 - \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2}}\right] - \left[\sqrt{4n^2 - 6n + 4}\right] = 2.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

VIII.223. Fie a, b, c, d patru numere reale pozitive cu $a+b+c+d = 4$. Arătaţi că $\frac{bcd}{bcd + bc + cd + db} + \frac{acd}{acd + ac + cd + da} + \frac{abd}{abd + ab + bd + da} + \frac{abc}{abc + ab + bc + ca} \leq 1$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

VIII.224. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc \geq a+b+c$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}(a + b + c)$.

Florin Rotaru, Focşani

VIII.225. Determinaţi numerele naturale n pentru care numerele $\sqrt{2n}$, $\sqrt{2n+1}$, ..., $\sqrt{3n}$ sunt, toate, iraţionale.

Constantin Dragomir, Piteşti

VIII.226. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura bazei de 6cm şi înălţimea de 12cm. Punctele M şi N se află pe muchia CC' astfel încât $CM = 6$cm şi $CN = 4$cm. Determinaţi cosinusul unghiului dintre dreptele BM şi $A'N$.

Gabriela Buzea, Bucureşti

VIII.227. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi α, β planele $(A'BD)$, respectiv $(CB'D')$. Să se arate că:

1) $d(\alpha, \beta) = d(A, \alpha) = d(C', \beta)$;

2) $ABCDA'B'C'D'$ este cub dacă şi numai dacă $d(\alpha, \beta) = \frac{1}{3}AC'$ (cu $d(\alpha, \beta)$ s-a notat distanţa dintre planele α şi β).

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.181. Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă ale expresiei $a_1 + a_2 + ... + a_n + (1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_n)$, când $a_1, a_2, ..., a_n$ parcurg intervalul $[0, 1]$.

Nguyen Viet Hung, Hanoi

IX.182. Dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive astfel încât $xyz \geq 7 + 5\sqrt{2}$, arătaţi că $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 6$.

Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

IX.183. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) = 60°$. Dacă $\frac{AM}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{6}$, unde M este mijlocul lui BC, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

IX.184. Fie ABC un triunghi cu unghiul $\widehat{A}$ ascuţit. Bisectoarea din A intersectează înălţimea BN în punctul P. Ştiind că $AP = \frac{2}{3}BN$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{A}$.

Titi Zvonaru, Comăneşti

IX.185. Pe laturile AD, AB şi BC ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele variabile M, N, respectiv P, astfel încât patrulaterele $MTCD$ şi $NBPT$ să aibă arii egale, unde $\{T\} = MP \cap CN$. Determinaţi locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP.

Cecilia Deaconescu, Piteşti şi Radu Deaconescu, student, Piteşti

Clasa a X-a

X.181. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, arătaţi că $\log_{ac^2b} ab + \log_{ba^2c} bc + \log_{cb^2a} ca \geq \frac{3}{2}$.

Florin Rotaru, Focşani

X.182. Dacă a, b, c sunt numere reale distincte, arătaţi că $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$.

Alina Tigae şi Carmen Terheci, Craiova

X.183. Dacă n este număr natural nenul dat, determinaţi numerele reale x pentru care $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \sin^3 \frac{x}{3^k} = 1 - \frac{\sin x}{4}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

X.184. Fie ABC un triunghi, r raza cercului înscris în triunghi şi I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului. Demonstraţi că $AI_a + BI_b + CI_c \geq 18r$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

X.185. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{2^x - 2015}{2017} - \left[\frac{2^x}{2017}\right]\right] = \log_{2016} \frac{x}{2017}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

Clasa a XI-a

XI.181. Demonstraţi că nu există matrice pătratice A şi B de ordin trei, cu elemente reale, astfel încât $\det A = \det B = 1$ şi $AB^* + BA^* = I_3$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.182. Un romb are latura de lungime a şi diagonalele de lungimi d_1 şi d_2. Demonstraţi că $\sqrt{(d_1 - 2a)(d_2 - 2a)} \leq a(2 - \sqrt{2})$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

XI.183. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive este definit prin: $x_1 > 1$, $x_{n+1}^2 = x_n\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right)^n$, $\forall n \geq 1$. Determinaţi limita şirului $y_n = \dfrac{1}{x_n^3} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XI.184. Fie $\gamma_n = 1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$ (*constanta Euler–Mascheroni*). Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(\gamma_n-\gamma)\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XI.185. Fie $f(a,b,c,d,p,q,x) = c+p(x-a)+\dfrac{3(d-c)-(b-a)(q+2p)}{(b-a)^2}(x-a)^2+\dfrac{(b-a)(q+p)-2(d-c)}{(b-a)^3}(x-a)^3$. Arătaţi că $f(a,b,c,d,p,q,x) = f(b,a,d,c,q,p,x)$ pentru orice numere reale a,b,c,d,p,q şi x.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.181. Determinaţi primitivele funcţiei $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = (2x+3)\ln(x+1)\ln(x+2)$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

XII.182. Determinaţi primitivele funcţiei $f: I\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^4-8x^3+64x+65}$, I fiind un interval pe care numitorul nu se anulează.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

XII.183. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{x^2}} t^3 \sin\frac{1}{t}dt$.

Silviu Boga, Iaşi

XII.184. Determinaţi polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^3+aX^2+bX+c$ care au o rădăcină reală de modul 2 şi o rădăcină nereală de modul 1.

Ioana-Maria Popa, elevă, Iaşi

XII.185. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice pătratice ale căror polinoame minimale sunt relativ prime. Demonstraţi că funcţia $h:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $h(X) = AX-XB$ este un automorfism al grupului $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),+)$.

Radu Deaconescu, student, Piteşti şi Cecilia Deaconescu, Piteşti