Probleme propuse[1]

P355. Găsiţi trei numere consecutive în şirul numerelor de la 1 la 30 care să aibă suma 30.
(*Clasa pregătitoare*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

P356. Colorează figura geometrică care nu se află la stânga cercului şi pătratului şi nu este dreptunghi $\bigcirc\ \square\ \triangle\ \boxed{}$
(*Clasa pregătitoare*) **Mihaela Munteanu, elevă, Iaşi**

P357. Fie şirul $1; 2; 3; 2; 3; 5; 3; \square; \square$. Completaţi casetele libere respectând regula de formare şi găsiţi cifra care apare de cele mai multe ori în şirul obţinut.
(*Clasa I*) **Emanuela Păduraru, elevă, Iaşi**

P358. Care dintre numerele $23, 12, 3, 45, 76$ este cel mai îndepărtat de 34?
(*Clasa I*) **Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P359. Aflaţi toate numerele de două cifre care au suma cifrelor mai mică decât suma cifrelor vecinului mai mic. (Exemplu: numărul 50 îndeplineşte condiţia deoarece are suma cifrelor mai mică decât suma cifrelor numărului 49.)
(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P360. Scrie în casete numai numere formate cu cifra 3 astfel încât să fie corect $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 399$.
(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P361. Un ţăran avea 60 de păsări, găini şi raţe. După ce vinde 18 găini şi câteva raţe, observă că numărul găinilor s-a înjumătăţit, iar cel al raţelor s-a redus la un sfert. Câte raţe i-au rămas?
(*Clasa a II-a*) **Ana Ionescu, elevă, Iaşi**

P362. Suma a trei numere impare consecutive este 39. Care sunt aceste numere?
(*Clasa a II-a*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

P363. Aflaţi valoarea numărului a pentru care

$$10 \times 10 - 10 \times [10 \times 10 - 10 \times (10 - 10 : a)] = 0.$$

(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Canada**

P364. Putem împărţi numerele $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$ în trei grupe de câte trei numere astfel încât în fiecare grupă suma numerelor să fie pară? Justificaţi!
(*Clasa a III-a*) **Adina Relinschi, elevă, Iaşi**

P365. Suma a două numere este un număr de două cifre ce are suma cifrelor 12. Aflaţi cele două numere ştiind că triplul unuia este dublul celuilalt.
(*Clasa a III-a*) **Maria Crăcană, elevă, Iaşi**

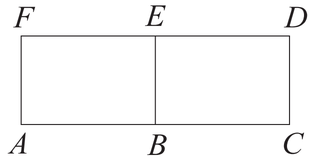
P366. Arătaţi că, oricum am alege şase numere dintre numerele $10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$, există două astfel încât ultima cifră a sumei lor este zero.
(*Clasa a III-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 20 ianuarie 2017.

P367. Fie a şi b două numere naturale nenule astfel încât $2 \times b - 3 \times a = 17$. Arătaţi că $b \geq 0$.
(*Clasa a IV-a*) **Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti**

P368. Arătaţi că numărul $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 51 - 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 49$ se împarte exact la numărul $47 \times 49 \times 50$.
(*Clasa a IV-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

P369. Figura alăturată s-a format prin alipirea dreptunghiurilor $ABEF$ şi $BCDE$. În câte moduri putem să alegem trei laturi din cele şapte existente astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă capete comune?
(*Clasa a IV-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**



P370. Se consideră şirul de fracţii $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$ Ce fracţie trebuie scrisă pe locul 57?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.207 Determinaţi mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; (ii) $A \cap B = \{1, 2\}$; (iii) $8 \notin A \setminus B$; (iv) suma elementelor lui A este egală cu suma elementelor lui B.

Valeriu Iovan, Craiova

V.208 Numerele naturale a, b şi c sunt astfel încât $2ab = c$, $bc = 8a$ şi $ca = 2b$. Calculaţi suma $S = a + b + c$.

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

V.209 Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele naturale de 25 cifre care au suma cifrelor 25 şi sunt divizibile cu 25.

Constantin Dragomir, Piteşti

V.210 Dacă numărul $A = (a - b)(99a + 100b) + (a + b)(111a + 112b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 3, arătaţi că cel puţin unul dintre numerele a şi b este divizibil cu 3.

Teodor-Ioan Băltoi, elev, Roman

V.211 Pe un teren dreptunghiular cu aria de 900 m^2 se construieşte o piscină dreptunghiulară cu aria de 400 m^2. Atât dimensiunile terenului cât şi cele ale piscinei se exprimă, în metri, prin numere naturale divizibile cu 5. De jur împrejurul terenului şi de jur împrejurul piscinei se află câte un gard. În condiţiile problemei, care este lungimea totală minimă a acestor garduri?

Vlad-Mihai Ciuperceanu, elev, Craiova

V.212 În vârfurile unui cub sunt scrise cinci numere egale cu 0 şi trei numere egale cu 1. Un pas înseamnă mărirea cu 1 a numerelor din vârfurile unei muchii oarecare. Este posibil ca, după un număr de paşi, cele opt numere din vârfurile cubului să devină egale?

Ioan-Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

V.213 Se consideră produsul $P = \overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot e$. Înlocuiţi cele cinci litere cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$, folosind fiecare cifră câte o singură dată, astfel încât produsul P să fie minim.

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.207. Pentru a promova un examen, trebuie susţinute şi promovate patru probe. Dintre elevii unei şcoli care participă la acest examen, 70% au trecut proba A, 80% au trecut proba B, 75% au trecut proba C şi 85% au trecut proba D. Arătaţi că cel puţin 10% dintre elevii şcolii au promovat examenul.

Neculai Stanciu, Buzău

VI.208. Notăm cu P produsul numerelor naturale de forma $\dfrac{n^3-3}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi numărul divizorilor naturali ai numărului P.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

VI.209. Demonstraţi că orice număr natural n admite o scriere unică $n = a_0 \cdot 3^k + a_1 \cdot 3^{k-1} + \ldots + a_{k-2} \cdot 3^2 + a_{k-1} \cdot 3 + a_k$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{-1, 0, 1\}$.

Scrieţi numărul 2016 sub această formă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.210. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$. Determinaţi $k, x \in \mathbb{N}, k \neq 0$, pentru care $(2k)!! = x^2 + 2$.

Denisa Drăghia, elevă, Craiova

VI.211. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x > y$, astfel încât $x - 2016y^2 = y - 2015x^2$. Arătaţi că $x - y$ este pătrat perfect.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

VI.212. Pe latura AB a triunghiului ascuţitunghic ABC se fixează un punct F astfel încât $m(\widehat{ACF}) + 2m(\widehat{BCF}) < 90°$. Determinaţi poziţiile punctelor $M \in (BC)$ şi $N \in (AC)$ pentru care suma $FM + MN$ ste minimă.

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

VI.213. Pe foaie este desenat un triunghi şi două dintre mediatoarele sale. Folosind doar o riglă negradată, construiţi cea de-a treia mediatoare.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Clasa a VII-a

VII.207. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $x^3 + y^3 = x^4 + y^4 = 1$.

Viorica Momiţă, Iaşi

VII.208. Demonstraţi că numărul $N = 2016^{n+1} - 2015n - 2016$, $n \in \mathbb{N}^*$, are cel puţin 27 de divizori naturali.

Alessandro Ventullo, Milano, Italia

VII.209. Arătaţi că, pentru orice număr real a, are loc identitatea $(10a^2 - 8a)^2 + (11a^2 - 20a + 8)^2 + (12a^2 - 20a + 8)^2 = (13a^2 - 20a + 8)^2 + (14a^2 - 20a + 8)^2$.

Marian Tetiva, Bârlad

VII.210. Se consideră triunghiul isosel ABC cu $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 40°$. Notăm cu E piciorul bisectoarei din B şi fie $P \in (BC)$ astfel încât $PE = PC$. Arătaţi că $\mathcal{P}_{ABE} = \dfrac{AB^2}{AE}$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.211. Fie M şi N mijloacele laturilor neparalele AD respectiv BC ale trapezului $ABCD$. Dacă $\{S\} = AN \cap CM$, $\{T\} = BM \cap DN$, demonstraţi că $ST \| AB$ şi calculaţi lungimea segmentului ST în funcţie de bazele trapezului.

Mihail Frăsilă şi Constantin Petrea, Paşcani

VII.212. Punctul P este situat pe arcul mic $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC. Notăm $\{M\} = BC \cap AP$. Ştiind că $19\mathcal{P}_{ABC} = 27 \cdot \mathcal{P}_{PBC}$, arătaţi că $AM = 0,9 \cdot BC$.

Constantin Petrea, Paşcani

VII.213. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea CD a unghiului $\widehat{C}$, $D \in AB$, intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul E. Demonstraţi că $2BD^2 = CE \cdot DE$.

Cătălin Cristea, Craiova

Clasa a VIII-a

VIII.207. Fie x, y numere egale astfel încât $xy = x + y$. Arătaţi că x şi y fie sunt simultan numere raţionale, fie sunt simultan numere iraţionale.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VIII.208. Determinaţi numerele reale x, y, z cu proprietăţile: $x - y + z = 2$, $xz - yz = (xy - 1)^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Bogdan Chiriac, Bacău

VIII.209. Determinaţi perechile de numere întregi $(x, y) \neq (0, 0)$ pentru care $x^4 + 2x^3 = x + y + y^2$ şi $y^4 + 2y^3 = y + x + x^2$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.210. Dacă $x, y, z \in (0, 1]$, demonstraţi că:

$$\frac{xy}{xy + x + y} + \frac{yz}{yz + y + z} + \frac{zx}{zx + z + x} \leq 1.$$

Ovidiu Pop, Satu-Mare

VIII.211. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sunt astfel încât $a + b + c = 6$, arătaţi că

$$\frac{2016 + 2b}{a + 8} + \frac{2016 + 2c}{b + 8} + \frac{2016 + 2a}{c + 8} \geq 606.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

VIII.212. Două plane perpendiculare intersectează o sferă de rază R după două cercuri de raze a respectiv b. Dacă distanţa de la centrul sferei la dreapta de intersecţie a planelor este c, arătaţi că $a + b + c \leq R\sqrt{6}$.

Maria Rusu, Târgu Frumos

VIII.213. Se consideră tetraedrul $VABC$ cu $VA \perp VB \perp VC \perp VA$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor VAC, VAB şi VBC şi cu h distanţa de la V la planul (ABC). Arătaţi că

$$\frac{1}{h^2} \geq \frac{S_1}{S_2^2+S_3^2} + \frac{S_2}{S_3^2+S_1^2} + \frac{S_3}{S_1^2+S_2^2}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.171. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi $2x_n + 3x_{n+2} \leq 5x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $x_n \leq 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Camelia Dană şi Ileana Didu, Craiova

IX.172. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + (abc - 1)^2.$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

IX.173. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\cos(a+b) \neq \pm \sin(a-b)$; arătaţi că

$$\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg}(a+b) \cdot \frac{3\cos^2(a+b) - \sin^2(a-b)}{\cos^2(a+b) - \sin^2(a-b)}.$$

b) Demonstraţi că $\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}$.

Marian Tetiva, Bârlad

IX.174. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $m(\widehat{DAC}) = 20^\circ$, $m(\widehat{DCA}) = 45^\circ$, $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{BCA}) = 60^\circ$. Demonstraţi că diagonalele AC şi BD nu sunt perpendiculare.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

IX.175. Fie dat un triunghi ABC şi fie O centrul cercului circumscris lui. Să se calculeze aria coroanei determinată de cercurile cu centrele în O şi tangente la cercul înscris triunghiului dat.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.171. Demonstraţi că numărul $A = \left(\arccos \frac{10}{7\sqrt{7}}\right) : \left(\arccos \frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$ este natural.

Ionel Tudor, Călugăreni

X.172. Fie $a, x, y, z \in (0,1)$ sau $a, x, y, z \in (1, \infty)$ astfel încât $\log_a x + \log_a y + \log_a z + \log_x a + \log_y a + \log_z a = 10$. Arătaţi că $\min\{a, a^9\} \leq xyz \leq \max\{a, a^9\}$.

Dan Popescu, Suceava

X.173. Punctul M este situat pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic isoscel ABC. Pe perpendiculara în M pe AM se consideră punctul P astfel încât $AM = MP$

şi P se află în semiplanul determinat de dreapta AM şi punctul C. Punctul Q este simetricul lui C faţă de M, iar perpendiculara în Q pe BC intersectează AB în R. Demonstraţi că dreapta RP trece printr-un punct fix, indiferent care ar fi poziţia lui M pe segmentul BC.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

X.174. Numerele complexe nenule a, b, c sunt astfel încât $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$ şi $|a+b+c| \leq 1$. Arătaţi că $|z-a|+|z-b|+|z-c|+|z+a+b+c| \geq |a+b|^2+|b+c|^2+|a+c|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Tidor Pricope, elev, Botoşani

X.175. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\alpha + \beta| \geq 2$. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2|$, demonstraţi că $|z_1 + z_2| \leq |\alpha z_1 + \beta z_2|$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Clasa a XI-a

XI.171. Fie a, b, c, d numere complexe astfel încât $a(b + a) = d(b + c) = 1$ şi $b^2 + ad = c^2 + ad = 0$. Demonstraţi că $b(a+d) = c(a+d) = 1$ şi $a^2 + bc = d^2 + bc = 0$.

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

XI.172. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $A^2B + BA^2 = AB^2 + B^2A$ şi $A - B$ este inversabilă. Demonstraţi că A şi B nu pot fi simultan inversabile.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.173. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+B^2+I_2 = AB$. Arătaţi că $AB = BA$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.174. Calculaţi derivata de ordin n a funcţiei $f : \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^n}{x-a}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este dat.

Lucian Tuţescu şi Teodora Rădulescu, Craiova

XI.175. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - ax] = b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $d \in \mathbb{R}_+^*$, există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_2 - x_1 = d$ şi $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$. (O extindere a teoremei de medie a lui Lagrange.)

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.171. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, arătaţi că $\displaystyle\int_4^5 \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx < \frac{\ln 2}{2}$.

Aurel Chiriţă, Slatina

XII.172. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} n(f(1) + f'(1) - n(f(1) - n\int_0^1 x^n f(x)dx)) = f(1) + 3f'(1) + f''(1).$$

Marian Tetiva, Bârlad

XII.173. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \int_0^n \frac{x^2+n^2}{2^{-x}+1} dx$.

D.M. Batineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.174. Determinaţi polinoamele $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ care au cel puţin două rădăcini întregi.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII.175. Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $125 | 2^k + 3^n$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G306. Arătaţi că ecuaţia $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2006}$ are soluţii în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G307. Determinaţi numerele naturale n pentru care $a = 2^n + 4^n + 8^n + 107^n$ este pătrat pefect.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G308. Scrieţi numărul 3064^{3064} ca sumă de cuburi perfecte cu număr minim de termeni.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G309. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $3^a + 4^b = 5^c$.

Andrei George Turcu, elev, Craiova

G310. Dacă pătratul numărului natural nenul n se poate scrie sub forma $x^2 = 3y^2 + 3y + 1$, $y \in \mathbb{N}^*$, atunci x este sumă de două pătrate perfecte consecutive.

Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G311. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xyz = x+y+z+2$. Demonstraţi că

$$3 + \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G312. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstraţi că

$$\frac{a+b-c}{3ab-bc-ac} \geq \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{abc}.$$

Răzvan Morariu, elev, Iaşi

G313. Punctele L şi K aparţin ipotenuzei (BC) a triunghiului dreptunghic isoscel ABC astfel încât $L \in (BK)$. Demonstraţi că segmentele (LK) şi $(BL), (KC)$ pot să fie ipotenuza, respectiv catetele unui triunghi dreptunghic dacă şi numai dacă $m(\widehat{LAK}) = 45°$.

Claudiu-Ştefan Popa şi Doru Buzac, Iaşi