

XI.164. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} \sqrt[n+1]{n+1} - x_n \sqrt[n]{n})$.

D.M. Băținețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

XI.165. Există două funcții strict convexe ale căror grafice se intersectează în exact n puncte?

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.161. Fie u, v numere reale fixate și mulțimile

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & ua & vb & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}, \quad V = \{(ua, vb, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Pe mulțimea M definim operația de înmulțire a matricelor, iar pe mulțimea V considerăm adunarea vectorilor. Demonstrați că (M, \cdot) și $(V, +)$ sunt grupuri comutative izomorfe.

Gheorghe Costovici, Iași

XII.162. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous differentiable function. Prove that $\int_0^x (f(t) + \sin^2 t \cdot f'(t)) dt \geq f(x) \cdot \sin^2 x, \forall x \geq 0$.

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia

XII.163. Determinați funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $f(0) = 1, f'(0) = 0$ și $2f - f' \in \int f(x) dx$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

XII.164. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x)f(1-x) \geq \int_0^1 f^2(x) dx, \forall x \in [0, 1]$. Demonstrați că funcția f nu poate fi injectivă.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XII.165. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{(-1)^{[\sqrt{x}]}}{x^2} dx$.

Temistocle Bîrsan, Iași

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G286. Definim mulțimile $(A_n)_{n \geq 0}$ astfel: $A_0 = \{1, 2, \dots, 2015\}$; A_1 se obține înlocuind fiecare element al lui A_0 cu suma tuturor celorlalte elemente ale lui A_0 ; A_2 se obține înlocuind fiecare element al lui A_1 cu suma tuturor celorlalte elemente ale lui A_1 ș.a.m.d. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că nu există elemente în A_n care să fie congruente modulo 2016.

Vlad Tuchiluş, elev, Iași

G287. Avem un număr nemărginit de jetoane de opt culori. Stabiliți care este cel mai mic număr de jetoane care trebuie așezate în rând astfel încât, pentru oricare două culori diferite, să se găsească în rând două jetoane vecine având aceste culori.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureș

G288. Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât $3ab = 2c^2$. Arătați că numărul $a^3 + b^3 + c^3$ este compus.

Lucian Tușescu, Craiova și Marian Voinea, București

G289. Fie a, b, c, x, y, z numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 3$. Demonstrați că

$$36 \left(\frac{x^3}{(a+b)^2} + \frac{y^3}{(b+c)^2} + \frac{z^3}{(c+a)^2} \right) \geq (x+y+z)^3.$$

Robert Antohi, elev, Iași

G290. Fie x, y, z, n numere reale cu $x, y, z \geq 1$ și $n > 1$, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + 2$. Arătați că $x + y + z \geq n + 2$.

Titu Zvonaru, Comănești și Bogdan Ioniță, București

G291. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătați că

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} + \frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

Mircea Lascu și Marius Stănean, Zalău

G292. Un triunghi ascuțitunghic ABC are proprietatea că suma distanțelor de la oricare punct din interiorul triunghiului la laturile acestuia este egală cu lungimea înălțimii din A . Demonstrați că triunghiul este echilateral.

Petru Asaftei, Iași

G293. Cercurile $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ trec prin punctul M . Două drepte a și b trec prin M și taie a doua oară cercurile în A_1 și A_2 , respectiv în B_1 și B_2 . Dacă $MA_1 = A_1A_2$ și $MB_1 = B_1B_2$, arătați că cercurile sunt tangente în M și $r_2 = 2r_1$.

Romana Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj

G294. Pe laturile BC și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M respectiv D și fie $\{F\} = BD \cap AM$. Paralela prin F la BC taie AC în punctul E . Dacă $\frac{1}{DE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE} + \frac{1}{AC}$, arătați că M este mijlocul lui BC .

Titu Zvonaru, Comănești

G295. Fie triunghiul ABC și punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ și $C_1 \in AB$ astfel încât dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 să fie concurente. Punctele X, Y și Z reprezintă intersecțiile dreptelor AP, BP și CP cu segmentele $(B_1C_1), (A_1C_1)$ respectiv (A_1B_1) , unde P este un punct fixat în interiorul triunghiului ABC . Demonstrați că dreptele A_1X, B_1Y și C_1Z sunt concurente.

Neculai Roman, Mircești, Iași

B. Nivel liceal

L286. Fie ABC un triunghi în care unghiul \hat{A} este cel mai mare și punctele $D_1, D_2 \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAD}_1 \equiv \widehat{ACB}$ și $\widehat{CAD}_2 \equiv \widehat{ABC}$. Dacă r este raza

cercului înscris în $\triangle ABC$ și ρ este raza cercului circumscris $\triangle AI_1I_2$ (unde I_1, I_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD_2 , respectiv ACD_1), demonstrați că $r = 2\rho \sin^2 \frac{A}{2}$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L287. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC . Notăm cu S' punctul lui Spieker al triunghiului $A'B'C'$. Dreptele AS', BS', CS' intersectează laturile BC, CA, AB în punctele M, N , respectiv P . Să se demonstreze că perpendicularele în punctele M, N, P pe laturile BC, CA , respectiv AB sunt concurente dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

Nela Ciceu, Bacău și Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

L288. Dacă într-un triunghi neisoscel dreapta determinată de punctul lui Lemoine și centrul cercului lui Euler este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci triunghiul este dreptunghic.

Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău

L289. Construim șirul de triunghiuri $A_n B_n C_n$, $n \in \mathbb{N}$, astfel: $\triangle A_0 B_0 C_0$ este arbitrar ales; vârfurile triunghiului $A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1}$ sunt punctele în care medianele $\triangle A_k B_k C_k$ intersectează cercul circumscris acestuia, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Dacă în șirul astfel definit există două triunghiuri congruente, arătați că $\triangle A_0 B_0 C_0$ este echilateral.

Vasile Jiglău, Arad

L290. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal care este atât înscrisibil, cât și circumscrisibil; fie r, R raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris. Dacă $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ și $f = BD$, demonstrați că

$$\frac{3R^2}{r^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{e}{f} + \frac{f}{e}.$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L291. Notăm cu a numărul fracțiilor zecimale finite care se scriu, în formă ordinară, ca fracții de tipul $\frac{1}{x}$, unde x este număr natural de n cifre (în baza 10). Demonstrați că $4n + 1 \leq a \leq 6n + 1$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

L292. Fie $(F_n)_{n \geq 0}$ șirul lui Fibonacci și $(L_n)_{n \geq 0}$ șirul lui Lucas, definite prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $p, j \in \mathbb{N}^*$ sunt oarecare, demonstrați că:

$$a) \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p}; \quad b) \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{L_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{L_{2n+j}^p}.$$

Nicușor Zlota, Focșani

L293. Fie $a_1, \dots, a_n \in (0, 1]$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(1 - a_k)^2}{a_k} \leq \frac{(1 - \prod_{k=1}^n a_k)^2}{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L294. Să se arate că, pentru orice numere pozitive a, b, c , are loc inegalitatea: $a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq \frac{1}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)|$.

Marian Tetiva, Bârlad

L295. Determinați valoarea minimă a numărului real pozitiv k , încât pentru orice numere reale pozitive a, b, c să aibă loc inegalitatea:

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} + k \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq k + 2.$$

Florin Stănescu, Găești

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G286. The sets $(A_n)_{n \geq 0}$ are defined as follows: $A_0 = \{1, 2, \dots, 2015\}$; A_1 is obtained after replacing each element of A_0 by the sum of all the other elements of A_0 ; similarly, A_2 is obtained by replacing each element of A_1 by the sum of all the other elements of A_1 and so on. If $n \in \mathbb{N}^*$, show that no elements being congruent modulo 2016 exist in A_n

Vlad Tuchiluş, pupil, Iași

G287. We have an infinite number of counters in eight colours. Establish which is the least number of counters that have to be arranged in a row so that, for any couple of distinct colours, two neighbor counters having these two colours to be found in the row.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G288. Let a, b, c be natural numbers such that $3ab = 2c^2$. Show that the number $a^3 + b^3 + c^3$ is a composite number.

Lucian Tuțescu, Craiova and Marian Voinea, București

G289. Let a, b, c, x, y, z be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Show that

$$36 \left(\frac{x^3}{(a+b)^2} + \frac{y^3}{(b+c)^2} + \frac{z^3}{(c+a)^2} \right) \geq (x+y+z)^3.$$

Robert Antohi, pupil, Iași

G290. Let x, y, z, n be real numbers with $x, y, z \geq 1$ and $n > 1$, such that $x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + 2$. Show that $x + y + z \geq n + 2$.

Titu Zvonaru, Comănești and Bogdan Ioniță, București

G291. If a, b, c are positive real numbers, show that

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} + \frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

Mircea Lascu and Marius Stănean, Zalău

G292. An acute-angle triangle ABC has the property that the sum of distances from any interior point of the triangle to the three sides equals the length of the altitude from A . Prove that the triangle is equilateral.

Petru Asaftei, Iași

G293. The circles $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ and $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ pass through the point M and cut the circles, for the second time, at the points A_1 and A_2 , (respectively) at B_1 and B_2 . If $MA_1 = A_1A_2$ and $MB_1 = B_1B_2$, show that the circles are tangent at M and $r_2 = 2r_1$.

Romanța Ghiță and Ioan Ghiță, Blaj

G294. The points M and respectively D are considered on the sides BC and AC of the triangle ABC , and let $\{F\} = BD \cap AM$. The parallel through F to BC cuts AC at the point E . If $\frac{1}{DE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE} + \frac{1}{AC}$, show that M is the midpoint of BC .

Titu Zvonaru, Comănești

G295. Let us consider the triangle ABC and the points $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ and $C_1 \in AB$ so that the lines AA_1, BB_1 and CC_1 be concurrent. The points X, Y and Z represent the intersections of the lines AP, BP and CP with the segments (B_1C_1) , (A_1C_1) and respectively (A_1B_1) , where P is a fixed point in the interior of the triangle ABC . Show that the lines A_1X, B_1Y and C_1Z are concurrent.

Neculai Roman, Mircești, Iași

B. Highschool level

L286. Let ABC be a triangle with its largest angle \hat{A} and the points $D_1, D_2 \in (BC)$ such that $\widehat{BAD_1} \equiv \widehat{ACB}$ and $\widehat{CAD_2} \equiv \widehat{ABC}$. If r is the radius of the incircle of $\triangle ABC$ and ρ is the radius of the circumcircle of $\triangle AI_1I_2$ (where I_1, I_2 are the centres of the circles inscribed in the triangles ABD_2 , respectively ACD_1), prove that $r = 2\rho \sin^2 \frac{A}{2}$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L287. Let A', B', C' be the midpoints of the sides of the triangle ABC . Let S' denote the Spieker point of the triangle $A'B'C'$. The lines AS', BS', CS' cut the sides BC, CA, AB at the points M, N , and respectively P . Prove that the perpendicular lines at the points M, N, P on the sides BC, CA and respectively AB are concurrent if and only if the triangle is isosceles.

Nela Ciceu, Bacău and Roxana Mihaela Stanciu, Buzău

L288. If, in a non-isosceles triangle, the straight line determined by Lemoine's point and the centre of Euler's circle is parallel to a side of the triangle, then the triangle is right-angled.

Titu Zvonaru, Comănești and Neculai Stanciu, Buzău

L289. We build the sequence of triangles $A_n B_n C_n$, $n \in \mathbb{N}$, as follows: $\triangle A_0 B_0 C_0$ is arbitrarily chosen; the vertices of the triangle $A_{k+1} B_{k+1} C_{k+1}$ are the points at which the medians of $\triangle A_k B_k C_k$ intersect the circumcircle of this triangle, for any $k \in \mathbb{N}$. If two congruent triangles exist in the sequence defined in this way, show that

$\triangle A_0B_0C_0$ is equilateral.

Vasile Jiglău, Arad

L290. Let $ABCD$ be an orthodiagonal quadrilateral which is both inscribable and circumscribable. Let r, R be the radii of the inscribed and respectively circumscribed circles. If $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC$ and $f = BD$, prove that

$$\frac{3R^2}{r^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{e}{f} + \frac{f}{e}.$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L291. Denote by a the number of finite decimal fractions that are written, in ordinary form, as fractions of type $\frac{1}{x}$ (unit fractions) where x is a natural number of n digits (in base 10). Prove that $4n + 1 \leq a \leq 6n + 1$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

L292. Let $(F_n)_{n \geq 0}$ be Fibonacci's sequence and $(L_n)_{n \geq 0}$ be Lucas' sequence, defined by $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, respectively $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. If $p, j \in \mathbb{N}^*$ are arbitrary, show that

$$a) \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p}; \quad b) \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{L_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{L_{2n+j}^p};$$

Nicușor Zlota, Focșani

L293. Let $a_1, \dots, a_n \in (0, 1]$. Show that the following inequality holds:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(1 - a_k)^2}{a_k} \leq \frac{(1 - \prod_{k=1}^n a_k)^2}{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L294. Show that any positive numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)|. \end{aligned}$$

Marian Tetiva, Bârlad

L295. Determine the minimum value of the positive real number k so that any positive real numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\sum \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} + k \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq k + 2.$$

Florin Stănescu, Găești