Probleme propuse[1]

Clasele primare

P325. În scrierea $1\square 3\square 5\square 7 = 26\square 8\square 2$, completaţi casetele cu unul din semnele $+$ sau $-$ astfel încât să obţineţi o egalitate. Arătaţi că există o singură soluţie.
(*Clasa I*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P326. Suma a şase numere nenule este 20. Ştiind că în sumă sunt exact doi termeni egali, să se scrie toate sumele ce îndeplinesc aceste condiţii.
(*Clasa I*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

P327. Din şirul numerelor $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1$ se extrag două. Să se arate că suma numerelor rămase nu poate fi 12.
(*Clasa I*) **Ana Ionescu, elevă, Iaşi**

P328. În şirul $\boxed{1}\boxed{}$, $\boxed{2}\boxed{}$, $\boxed{3}\boxed{}$, $\ldots$, $\boxed{9}\boxed{}$, fiecare casetă liberă se completează cu o cifra nenulă utilizată o singură dată. Să se arate că suma numerelor de doua cifre obţinute este mai mică decât 496.
(*Clasa a II-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P329. Ştiind că diferenţa dintre numerele a şi b este 5 şi că diferenţa dintre numerele c şi d este 7, să se calculeze diferenţa dintre suma numerelor a şi c şi suma numerelor b şi d.
(*Clasa a II-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P330. În câte moduri putem aranja formele geometrice de pătrat cerc, triunghi şi dreptunghi una după alta, astfel încât cercul să fie înaintea pătratului?
(*Clasa a II-a*) **Mădălina Baciu, elevă, Iaşi**

P331. Cu 12 pătrate de latură 1 cm construiţi dreptunghiul de perimetru minim. Care este valoarea perimetrului său?
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P332. Să se arate că numărul 987 nu se poate scrie ca suma a două numere răsturnate. (Exemplu: 231 şi 132 sunt numere răsturnate.)
(*Clasa a III-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

P333. Cum putem măsura 5 l de apă având la dispoziţie două vase negradate de 11 l şi 7 l?
(*Clasa a III-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

P334. Într-o împărţire exactă suma dintre deîmpărţit, împărţitor şi cât este 49, iar suma dintre deîmpărţit şi cât este 45. Să se afle deîmpărţitul.
(*Clasa a II-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

P335. Fie trei numere naturale nenule. Se calculează diferenţele a câte două dintre ele şi se obţine: $6, 12, 18$. Arătaţi că numărul cel mai mare este cel puţin egal cu 19.
(*Clasa a IV-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

P336. Să se afle un număr ştiind că suma dintre acest număr, dublul lui, triplul lui şi împătritul lui este cu 19 mai mare decât jumătatea lui.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2016.

P337. Pe o masă sunt aşezate 16 cartonaşe cu faţa în jos având numere de la 1 la 16. Trei copii extrag câte 5 cartonaşe şi constată că sumele numerelor de pe ele sunt: 35, 41 şi 45. Arătaţi că unul dintre copii a extras cartonaşul cu numărul 16.
(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, studentă, Iaşi**

P338. În careul alăturat, în cele nouă casete sunt scrise crescător, atât pe linii cât şi pe coloane, numere diferite şi nenule. Care este valoarea celei mai mici sume $a + c + g + i$ posibile?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Clasa a V-a

V.193. Vom spune că un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ este *amuzant* dacă $3a^2 + b + c = 120$. Determinaţi numerele amuzante care sunt divizibile cu 3.

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

V.194. Vom spune că un număr natural de patru cifre $\overline{abcd}$ este *serios* dacă $a + 2b + 3c + 4d = 10$. Câte numere serioase există? Care este cel mai mic număr serios? Dar cel mai mare?

Gheorghe Iurea, Iaşi

V.195. Copiii din clasa a V-a B merg în excursie. Autocarul are 20 de locuri duble şi nimeni nu stă în picioare. Pe drum, profesorul de matematică observă că jumătate dintre copii stau de vorbă cu profesoara de engleză, $13,(3)\%$ dintre copii se joacă pe telefon iar cei rămaşi fac o zarvă de nedescris. Câţi copii merg în excursie?

Ioana-Maria Popa, elevă, Iaşi

V.196. Demonstraţi că nu există cifre nenule distincte a, b şi c astfel încât $\overline{abc} \cdot \overline{ba} = \overline{cba} \cdot \overline{bc}$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

V.197. Arătaţi că numărul $n = 653^{653}$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

Constantin Dragomir, Piteşti

V.198. Demonstraţi că numărul $A = 2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + 2017^2 + 2018^2$ nu este pătrat perfect.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.199. Se consideră mulţimea $M = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$.

a) Arătaţi că oricum am alege 50 de numere din M, există două numere alese care să aibă suma 101.

b) Arătaţi că putem alege 50 de numere din M astfel încât oricare două dintre numerele alese să aibă suma diferită de 100.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.193. Fie $p \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că numărul $n = \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{p \text{ cifre}}$ este prim. Demonstraţi că p este număr prim.

Constantin Dragomir, Piteşti

VI.194. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere naturale nenule pentru care $\dfrac{xy}{x+y}$ este număr prim.

Neculai Stanciu, Buzău

VI.195. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c şi d pentru care $ad = bc$, $ab + cd = 50$ şi $a \leq c \leq b$.

Ştefan Obadă, elev, Iaşi

VI.196. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x^2 + 7x = 2016y^2 + 2015$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

VI.197. Demonstraţi că numărul $N = 11^{11^{2015}} + 11^{11^{2014}} + 1$ se divide cu 7.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

VI.198. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC > BC$. Pe dreapta BC se iau punctele P şi Q astfel încât $B \in (CP)$, $C \in (BQ)$, $AC = CP = BQ$. Pe laturile AB şi AC se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = BC$ şi $AN = NQ$. Demonstraţi că $PM \| BN$.

Dorel Luchian, Iaşi

VI.199. Folosind doar rigla negradată şi compasul, construiţi un triunghi dreptunghic cu unghi de $30°$, având înălţimea corespunzătoare ipotenuzei congruentă cu un segment dat.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.193. Dacă a, b sunt numere reale mai mari ca 1 şi n este număr natural nenul, arătaţi că $ab + \dfrac{1}{a^n b^n} > \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{b^{n-1}}$.

Alina Tigae, Craiova

VII.194. Demonstraţi că numărul $N = (7^{2015} - 6^{2015} - 1)(7^{2011} - 6^{2011} - 1)$ este divizibil cu 301.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.195. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \| CD$, având lungimile laturilor $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ şi $d = AD$. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătaţi că $\mathcal{A}_{AOD} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{ac} \cdot \min\{b, d\}$. În ce condiţii se atinge egalitatea?

Daniela Munteanu, Iaşi

VII.196. Fie AP mediană în triunghiul ABC şi Q un punct pe segmentul AP, diferit de centrul de greutate al triunghiului. Notăm $\{M\} = CQ \cap AB$ şi $\{N\} = BQ \cap AC$.

a) Arătaţi că PM nu este paralelă cu AC, iar PN nu este paralelă cu AB.

b) Dacă $\{D\} = PM \cap AC$ şi $\{E\} = PN \cap AB$, arătaţi că $DE \| MN$.

Elena Iurea, Iaşi

VII.197. Fie $ABCD$ un trapez cu unghiurile $\widehat{A}$ şi $\widehat{D}$ drepte, în care $AD = DC < AB$. Fie M proiecţia lui C pe AB, iar N un punct de pe latura BC astfel încât $\dfrac{MO}{ON} = \dfrac{AB}{CD}$, unde $\{O\} = MN \cap BD$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BMN}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VII.198. Se consideră triunghiurile echilaterale ABC şi CDE astfel încât $C \in (BE)$, $BC = 2CE$ iar A şi D nu sunt separate de dreapta BC. Dacă $\{I\} = BD \cap AE$, demonstraţi că $BI = 2IE$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.199. Pe latura AC a triunghiului ABC cu $m(\widehat{A})=45°$ şi $m(\widehat{C})=30°$ se consideră punctul F astfel încât $BC^2=CF\cdot CA$. Perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta BF în punctul D. Arătaţi că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Clasa a VIII-a

VIII.193. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile exprimate prin numere naturale. Numărul ce reprezintă pătratul diagonalei este egal cu suma numerelor ce reprezintă dimensiunile paralelipipedului. Arătaţi că paralelipipedul este cub.

Cătălin Calistru, Iaşi

VIII.194. Fie $a, m, p \in (0, \infty)$ cu $m \neq 1$. Considerăm numerele $a_1 = am + p$, $a_2 = a_1m+p, \ldots, a_{100} = a_{99}m+p$. Dacă $a_1 = a_3$, calculaţi suma $S = a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VIII.195. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 = 54$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.196. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^3 + 3x^2 - 3x - y^2 + 2 = 0$.

Neculai Stanciu, Buzău

VIII.197. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale nenule x şi y pentru care $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$.

Roxana Vasile şi Luminiţa Mihalache, Craiova

VIII.198. Dacă a, b, c sunt numee reale pozitive, arătaţi că $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) \leq \min\{(a^2+b^2)^2, (b^2+c^2)^2, (c^2+a^2)^2\}$.

Lucian Tuţescu şi Nicoleta Bran, Craiova

VIII.199. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = AA' \cdot \sqrt{2}$ şi M un punct pe baza superioară $A'B'C'D'$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMC}$ şi $\widehat{BMD}$ să fie suplementare. Demonstraţi că M este centrul pătratului $A'B'C'D'$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Clasa a IX-a

IX.161. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, arătaţi că $\dfrac{a^m}{b^m} + \dfrac{b^m}{c^m} + \dfrac{c^m}{a^m} \leq \dfrac{a^n}{b^n} + \dfrac{b^n}{c^n} + \dfrac{c^n}{a^n}$.

Robert Antohi, elev, Iaşi

IX.162. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un şir strict crescător de numere reale pozitive. Pentru fiecare $n \geq 2$, definim mulţimea $A_n = \{a_ia_j | 1 \leq i < j \leq n\}$.

a) Dacă $(a_n)_{n\geq1}$ este progresie geometrică, arătaţi că A_n conţine exact $2n-3$ elemente, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) Dacă A_n are $2n-3$ elemente, oricare ar fi $n \geq 2$, demonstraţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

Dan Popescu, Suceava

IX.163. Fie ABC un triunghi de arie S şi S_1, S_2, S_3 ariile segmentelor de disc ce formează între laturile triunghiului şi cercul circumscris acestuia. Arătaţi că $S < S_1 + S_2 + S_3$.

Andrei Nicolaescu, elev, Craiova

IX.164. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului isoscel ABC (cu $AB = AC$) se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât $AN = 2NB$ şi $BM = MC$. Dacă $\{P\} = MN \cap AC$, demonstraţi că $\max\{AB, BC\} < MP < \sqrt{AB^2 + BC^2}$.

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

IX.165. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Dacă $\widehat{MAC} \equiv \widehat{B}$ şi $m(\widehat{BAM}) = 105°$, determinaţi $m(\widehat{B})$.

Mircea Lascu şi Marius Stănean, Zalău

Clasa a X-a

X.161. Pentru $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$, arătaţi că $x < x^{\log_2 x} + 3^{\log_2^3 x} + 5^{\log_2^5 x}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.162. Fie a, b, c, d numere complexe astfel încât $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{d}{|d|} = 0$. Arătaţi că $|z-a| + |z-b| + |z-c| + |z-d| \geq |a| + |b| + |c| + |d|$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

Irina Cristali, elevă, Bucureşti

X.163. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, arătaţi că $\sin 2x < \frac{1}{2x^2 - x^4}$.

Lucian Tuţescu şi Cristian Moanţă, Craiova

X.164. Determinaţi $a, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ cu proprietatea că numerele $\log_a(n-1)$ şi $\log_a n$ sunt raţionale.

Alexandru Blaga, Satu Mare

X.165. Determinaţi perechile (m,n) de numere întregi cu proprietatea că $m(\sin^n x + \cos^n x - 1) = n(\sin^n x + \cos^n x - 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Mihai Dicu, Craiova

Clasa a XI-a

XI.161. Se consideră parabola $\mathcal{P} : y = ax^2 + a (a > 0)$ şi cercul $\mathcal{C}$, tangent la parabolă în M şi la axa Ox în N. Scrieţi ecuaţia cercului $\mathcal{C}$, ştiind că tangenta în M la parabolă trece prin origine.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.162. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu proprietatea că $3A^4 - 14A^3 - 13A^2 + 6I_n = O_n$. Demonstraţi că $\det A > 0$.

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

XI.163. Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $3 \leq m < n$ şi funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin^m x}{m} + \frac{\cos^m x}{n}$. Determinaţi imaginea funcţiei f.

Ionel Tudor, Călugăreni

XI.164. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=x\in\mathbb{R}_+^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}\sqrt[n+1]{n+1}-x_n\sqrt[n]{n})$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XI.165. Există două funcţii strict convexe ale căror grafice se intersectează în exact n puncte?

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.161. Fie u, v numere reale fixate şi mulţimile

$$M=\left\{\begin{pmatrix}1 & ua & vb & c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}|a,b,c\in\mathbb{Q}\right\},\qquad V=\{(ua,vb,c)|a,b,c\in\mathbb{Q}\}.$$

Pe mulţimea M definim operaţia de înmulţire a matricelor, iar pe mulţimea V considerăm adunarea vectorilor. Demonstraţi că $(M,\cdot)$ şi $(V,+)$ sunt grupuri comutative izomorfe.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XII.162. Let $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ be a continuous differentiable function. Prove that $\int_0^x(f(t)+\sin^2 t\cdot f'(t))dt\geq f(x)\cdot\sin^2 x,\ \forall x\geq 0$.

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia

XII.163. Determinaţi funcţia derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă $f(0)=1,\ f'(0)=0$ şi $2f-f'\in\int f(x)dx$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

XII.164. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(x)f(1-x)\geq\int_0^1 f^2(x)dx,\qquad\forall x\in[0,1]$. Demonstraţi că funcţia f nu poate fi injectivă.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XII.165. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{(-1)^{[\sqrt{x}]}}{x^2}dx$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G286. Definim mulţimile $(A_n)_{n\geq 0}$ astfel: $A_0=\{1,2,\ldots,2015\}$; A_1 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_0 cu suma tuturor celorlalte elemente ale lui A_0; A_2 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_1 cu suma tuturor celorlate elemente ale lui A_1 ş.a.m.d. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, arătaţi că nu există elemente în A_n care să fie congruente modulo 2016.

Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi