XI.153. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir şi propoziţiile: (P_1) ,,Şirul $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_2) ,,Şirul $(\max(a_n, a_{n+1}))_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_3) ,,Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent". Arătaţi că:

a) (P_1) nu implică (P_3);
b) (P_2) nu implică (P_3);
c) (P_1) şi (P_2) implică (P_3).

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.154. Determinaţi numerele reale x cu proprietatea că $9^x + 25^x = 15^x + \dfrac{19}{225}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

XI.155. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$ şi numărul $a \in \left(\dfrac{1}{4}, \infty\right)$. Dacă $\det(A^2 + AB + aB^2) = 0$, arătaţi că $\det(A + B) = \det A + a\det B$.

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XII-a

XII.151. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = \dfrac{1}{2} + 3X - 4X^3$ şi $g\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$. Demonstraţi că f divide g.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.152. Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n şi cu $\varphi(n)$ numărul numerelor din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ care sunt relativ prime cu n. Pentru $n \in \{p^\alpha | p = \text{prim}, \alpha \in \mathbb{N}$, caculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\sigma(n)\cdot\varphi(n)}}{n}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.153. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat. Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x) \cdot f(x) + \lambda(f(x))^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sven Cortel, elev, Satu-Mare

XII.154. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $x^2 f(x) \geq e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Arătaţi că funcţia f nu are primitive.

Florin Nicolaescu, Balş

XII.155. Determinaţi funcţiile continue $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\} \leq \displaystyle\int_0^a f(x)\cdot g(x)dx$, $\forall a \in [0, \infty)$.

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G266. Determinaţi numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, există $B, C \subset A$ astfel încât $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$ şi $S_B + S_C \vdots 3$. (Am notat cu S_M suma elementelor mulţimii M.)

Cristian Lazăr, Iaşi

G267. Demonstraţi că nu există numere naturale x, y prime între ele, de parităţi diferite, pentru care numărul $a = xy^3 - yx^3$ să fie pătrat perfect.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G268. Considerăm numărul $a = 0,149162536\ldots$, obţinut prin scrierea (după virgulă) a tuturor pătratelor perfecte, unul după altul. Demonstraţi că a este iraţional.

Radu Miron, elev, Iaşi

G269. Arătaţi că $A = \dfrac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, este număr natural compus.

Lucian Tuţescu, Craiova

G270. Scrieţi în ordine crescătoare numerele 2014!, $(201!)^{4!}$ şi $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G271. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Arătaţi că

$$\frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} + \frac{y(z^2+x^2)}{z^2-zx+x^2} + \frac{z(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G273. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu laturile opuse neparalele şi fie O un punct în interiorul acestuia. Arătaţi că există un unic paralelogram $MNPQ$ având centrul O şi vârfurile pe dreptele AB, BC, CD respectiv DA.

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. Triunghiul dreptunghic neisoscel ABC are ipotenuza BC fixă, iar punctul E este situat pe cateta mai lungă astfel încât $AE = |AB - AC|$. Demonstraţi că mediatoarea segmentului AE trece printr-un punct fix.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G275. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, iar M este mijlocul muchiei AD. Planul perpendicular în B pe MB intersectează planul $(B'AC)$ după dreapta d. Notăm cu S proiecţia punctului B pe dreapta d. Determinaţi tangenta unghiului dintre dreptele AB' şi BS.

Gabriel Popa, Iaşi

B. Nivel liceal

L266. Fie n un număr natural nenul, $p = 2^{2^n} + 1$ un număr prim Fermat şi d cel mai mare divizor impar al numărului $\left(\dfrac{p-1}{2}\right)!$. Să se demonstreze că există numărul natural a astfel încât $d \equiv a^2 (\bmod p)$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

L267. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iaşi

L268. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a+b+c)^2}+\frac{2a}{2a+b+c}+\frac{2b}{a+2b+c}+\frac{2c}{a+b+2c}\geq\frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L269. Arătaţi că $a^{\sin x}\cdot(a+1)^{\cos x}<a^2$, $\forall a, x\in\mathbb{R}$, $a\geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi fie P un punct fixat pe înălţimea AD. O dreaptă variabilă care trece prin P intersectează laturile AB şi AC în punctele $E \in [AB]$, respectiv $F \in [AC]$. Determinaţi valorile extreme ale ariei triunghiului AEF, funcţie de $a = BC$, $b = AB = AC$ şi $d = AP$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L271. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$\frac{bc}{(p-a)^2}+\frac{ac}{(p-b)^2}+\frac{ab}{(p-c)^2}\geq\frac{20R-4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

L272. Determinaţi valorile numărului real k pentru care există un patrulater convex $ABCD$ având lungimile laturilor a, b, c, d şi aria S, astfel încât $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

L273. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi A_1 centrul cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $[AB$, $[AC$. În mod analog definim punctele B_1 şi C_1. Arătaţi că:

$$\sqrt{I_aA_1\cdot I_bB_1\cdot I_cC}+\sqrt{I_bB_1\cdot I_cC_1\cdot I_aA}+\sqrt{I_cC_1\cdot I_aA_1\cdot I_bB}=\sqrt{I_aA\cdot I_bB\cdot I_cC}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L274. Fie punctele $A_1, \ldots, A_n$ şi $B_1, \ldots, B_n$ aparţinând unei elipse $\mathcal{E}$ cu centrul O. Să se arate că există un punct $M \in \mathcal{E}$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2-\sum_{k=1}^{n} MB_k^2=\sum_{k=1}^{n} OA_k^2-\sum_{k=1}^{n} OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice de ordinul al treilea astfel încât $AB - BA$ să fie inversabilă. Demonstraţi că

$$Tr(AB(AB-BA)^{-1})=1+S(AB(AB-BA)^{-1}),$$

unde $Tr\,M$ este urma matricei M, iar $S(M)$ este suma minorilor elementelor de pe diagonala principală a lui M.

Marian Tetiva, Bârlad

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G266. Find the minimal natural number n with property that for any set $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{N}$, there exist $B, C \subset A$ such that $|B| = |C| = 3, B \cap C = \theta$, and $S_B + S_C \vdots 3$ (S_M is the sum of the elements from M).

Cristian Lazăr, Iaşi

G267. Prove that do not exist mutually prime natural numbers x, y of different parity so that the number $a = xy^3 - yx^3$ be a perfect square.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G268. Consider the number $a = 0.149162536\ldots$ obtained by writing (after the decimal point) all the perfect squares, one after the other. Prove that a is an irrational number.

Radu Miron, elev, Iaşi

G269. Show that $A = \dfrac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1), n \in \mathbb{N}^*$, is a composed natural number.

Lucian Tuţescu, Craiova

G270. Write, in increasing order, the numbers $2014!$, $(201!)^{4!}$ and $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G271. Let x, y, z be positive real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Prove that

$$\frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} + \frac{y(z^2+x^2)}{z^2-zx+x^2} + \frac{z(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

G272. If a, b, c are positive real numbers, show that

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

G273. The convex quadrilateral with non-parallel opposite sides $ABCD$ is considered and let O be an interior point to it. Show that there exists a unique parallelogram $MNPQ$ of centre O with its vertices on the lines AB, BC, CD and respectively DA.

Ovidiu Pop, Satu Mare

G274. The non-isosceles right-angled triangle ABC has the fixed hypotenuse BC, and the point E is situated on the longer cathetus such that $AE = |AB - AC|$. Show that the perpendicular on the middle of the segment AE passes through a fixed point.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G275. It is considered the cube $ABCDA'B'C'D'$, and M is midpoint of the edge AD. The perpendicular plane at B onto MB cuts the plane $(B'AC)$ along the straight line d. Let us denote by S the projection of point S onto the line d. Determine the tangent of the angle between the lines AB' and BS.

Gabriel Popa, Iaşi

B. Highschool Level

L266. Let n be a nonzero natural number, $p = 2^{2^n} + 1$ a Fermat prime number and $d =$ the largest odd divisor of the number $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Prove that a natural number a exists such that $d \equiv a^2 (\bmod p)$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

L267. Determine $a \in \mathbb{R}$ with the property that $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iaşi

L268. Prove that the positive real numbers a, b, c satisfy the inequality

$$\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a+b+c)^2} + \frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{a+2b+c} + \frac{2c}{a+b+2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L269. Show that $a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} < a^2$, $\forall a,\, x \in \mathbb{R},\; a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L270. It is considered the isosceles triangle ABC with $AB = AC$ and let P be a fixed point on the altitude AD. A variable line passing through P meets the sides AB and AC at the points $E \in [AB]$, respectively $F \in [AC]$. Determine the extremum values of the area of triangle AEF, as a function of $a = BC$, $b = AB = AC$ and $d = AP$

Adrian Corduneanu, Iaşi

L271. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{bc}{(p-a)^2} + \frac{ac}{(p-b)^2} + \frac{ab}{(p-c)^2} \geq \frac{20R-4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

L272. Determine the values of the real number k such that a convex quadrilateral $ABCD$ with the side lengths a, b, c, d and area S, satisfies the equation $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

L273. Let the triangle ABC be inscribed in the circle $\mathcal{C}$ and let A_1 be the center of the circle which is tangent (from the exterior) to circle $\mathcal{C}$ and to the halflines $[AB$, $[AC$. The next points B_1 and C_1 are analogously defined. Show that

$$\sqrt{I_a A_1 \cdot I_b B_1 \cdot I_c C} + \sqrt{I_b B_1 \cdot I_c C_1 \cdot I_a A} + \sqrt{I_c C_1 \cdot I_a A_1 \cdot I_b B} = \sqrt{I_a A \cdot I_b B \cdot I_c C}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L274. Let the points $A_1, \ldots, A_n$ and $B_1, \ldots, B_n$ be situated on an ellipse $\mathcal{E}$ with its center at O. Show that there exists a point $M \in \mathcal{E}$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} MB_k^2 = \sum_{k=1}^{n} OA_k^2 - \sum_{k=1}^{n} OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L275. Let $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ be two matrices of order three such that $AB - BA$ is invertible. Prove that

$$Tr\,(AB(AB - BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB - BA)^{-1}),$$

where $Tr\,M$ is the trace of matrix M, and $S\,(M)$ is the sum of the minors of the entries on the principal diagonal of matrix M.

Marian Tetiva, Bârlad

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.