Probleme propuse[1]

Clasele primare

P297. Completaţi cu cifre căsuţele goale din şirul $1, 2, \square, 5, 6, \square, 9$, astfel încât cele şapte numere rezultate să fie în ordine crescătoare.
(*Clasa I*) **Cătălina Bulei, elevă, Iaşi**

P298. Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 6, o singură dată fiecare. În câte moduri se pot şterge două numere astfel încât suma celor rămase să fie pară?
(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

P299. Tabloul alăturat are 50 linii. De câte ori apare în el numărul 19? Explicaţi răspunsul dat.
(*Clasa I*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

P300. Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}+\overline{bc}=756$ şi $\overline{cba}+\overline{ba}=952$.
(*Clasa a II-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

P301. În desenul alăturat, pe fiecare linie sunt scrise numere consecutive astfel încât $a+d=13$, $e+h=21$, $i+l=29$. Să se afle suma tuturor numerelor scrise în tabel.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P302. Scrieţi cel mai mare număr format din trei cifre nenule care are suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor 8, iar suma dintre cifra sutelor şi cea a zecilor 9.
(*Clasa a II-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P303. Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia $a \times \overline{bc} = c \times \overline{ba}$?
(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P304. Suma unor numere naturale este 350, iar produsul lor este 35. Să se afle aceste numere.
(*Clasa a III-a*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

P305. O familie compusă din părinţi şi doi copii merge la teatru. Ei au ocupat patru locuri consecutive pe acelaşi rând astfel încât copiii să nu stea unul lângă celălalt. În câte moduri se pot aşeza membrii familiei pe cele patru locuri?
(*Clasa a III-a*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P306. Spunem că două numere sunt ,,asociate" dacă suma lor se împarte exact la 2 sau la 3 sau la 5. Găsiţi toate numerele asociate cu 11 aflate între 10 şi 36.
(*Clasa a III-a*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P307. Să de determine câte perechi de numere consecutive formate din câte trei cifre au proprietatea că primul număr se împarte exact la trei, iar al doilea se împarte exact la patru.
(*Clasa a IV-a*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

P308. O suprafaţă dreptunghiulară de 2m$\times$ 3m se acoperă cu plăci dreptunghiulare de gresie de 25 cm $\times$ 50 cm. Se poate face lucrarea numai cu plăci întregi?
(*Clasa a IV-a*) **Marian Ciuperceanu, Craiova**

[1] Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2015.

P309. Să se găsească un număr care, adunat cu suma cifrelor sale, să dea 78912.
(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

P310. Se consideră numerele $1, 2, 3, \ldots, 9$.

a) Să se arate că numărul $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$ se împarte exact la 3.

b) Să se arate că există cel puţin o aranjare pe dreaptă a numerelor $1, 2, 3, \ldots, 9$ astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să nu se împartă exact la 3.
(*Clasa a IV-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.179. Arătaţi că numărul $n = 1023 \cdot 1024 + 2^{30} - 2^{20}$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Viorica Dogaru, Giurgiu

V.180. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ cu proprietatea că 2014 se divide cu $a^2 + b^2$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

V.181. Anul naşterii unei persoane este $\overline{abcd}$, unde $b = d^2$ şi $a + b = 10$. Stabiliţi ce vârstă va avea persoana în anul $2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

V.182. Găsiţi cele mai mici cinci numere naturale n pentru care numărul $A = \frac{17}{14} + \frac{1717}{1414} + \ldots + \frac{1717\ldots17}{1414\ldots14}$ (suma are n termeni) este pătrat perfect.

Vasile Chiriac, Bacău

V.183. Stabiliţi dacă fracţia $\frac{2013^{2014} + 2014^{2013}}{2013^{2013} + 2014^{2014}}$ este subunitară, echiunitară sau supraunitară.

Diana Gregoretti, Galaţi

V.184. Fie $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care orice submulţime cu n elemente a lui E conţine două elemente a căror sumă se divide cu 3.

Viorica Momiţă, Iaşi

V.185. Pe o tablă uriaşă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 1000, în ordine crescătoare. Cei n elevi dintr-un grup primesc numere de ordine de la 1 la n şi, în ordinea stabilită, şterg numere de pe tablă astfel: dacă un elev are număr impar, şterge toate numerele aflate pe poziţii impare în şirul de pe tablă; dacă are număr par, şterge toate numerele aflate pe poziţii pare în şirul de pe tablă. Cel de-al n-lea elev şterge ultimul număr aflat pe tablă. Stabiliţi care este acest ultim număr şters.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.179. Măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate, în grade, prin numerele a, b, c, d şi e. Dacă $0,75 \cdot a$; $0,6 \cdot b$ şi $0,(3) \cdot c$ sunt direct proporţionale cu $3, 3$ şi 2, iar $0,8(3) \cdot c$; $0,(5) \cdot d$ şi $0,2(7) \cdot e$ sunt invers proporţionale cu $2, 2$ şi 3, determinaţi numerele a, b, c, d şi e.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VI.180. Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $x^2 + xy = y + 2014$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.181. Fie a, b, c numere naturale cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2 = ab+5bc+ca$. Arătaţi că $(a + b)(b + c)(c + a)$ este un număr divizibil cu 8.

Denisa Alexandra Luchian, elevă, Iaşi

VI.182. Se consideră numerele prime distincte p, q, r şi s, astfel încât $(r+s, q) = 1$. Aflaţi numerele naturale nenule x, y şi z astfel încât $(x + z, y) = 1$, iar $\dfrac{py}{q} = \dfrac{rz}{s} = x$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.183. Arătaţi că şirul $133, 13333, 1333333, \ldots$ conţine numai numere compuse.

Elena Iurea, Iaşi

VI.184. Fie $A_{2n} = \underbrace{1010\ldots10}_{2n\text{ cifre}}$ şi $B_{4n} = \underbrace{11001100\ldots1100}_{4n\text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c ale numerelor A_{4n} şi B_{4n}.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VI.185. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$, mediatoarea laturii AB intersectează BC în M. Pe latura AB se consideră punctul N astfel încât $m(\widehat{AMN}) = 15°$. Arătaţi că CN este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.179. Perechile de numere reale (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - 2y^2 = 1$. Arătaţi că $x_1x_2 + 2y_1y_2 \neq 0$.

Petru Asaftei, Iaşi

VII.180. Fie a, x, y astfel încât $a > 0$ şi $0 \leq x, y \leq a$. Arătaţi că $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} \geq \sqrt{a^2 - (x + y - a)^2}$. În ce condiţii are loc egalitatea?

Dorina Goiceanu şi Nicoleta Bran, Craiova

VII.181. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 + 2y$ este pătrat perfect. Arătaţi că $x^2 + y$ se poate scrie ca suma pătratelor a două numere naturale.

Aurel Chiriţă, Slatina

VII.182. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil şi punctele M, N, P astfel încât $\{M\} = AC \cap BD$, $\{N\} = AB \cap CD$ şi $\{P\} = AD \cap BC$. Arătaţi că $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{NC} \cdot \dfrac{PA}{PC}$.

Silviu Boga, Iaşi

VII.183. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Mediatoarea laturii BC taie AB în E. Paralela prin E la OC taie BC în H. Demonstraţi că $OH \perp AB$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.184. Se consideră triunghiul ascuţiunghic ABC, cu $AB < AC$. Fie A' piciorul bisectoarei din A, iar D este un punct pe segmentul AA' astfel încât $BA' = BD$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABA', arătaţi că:

a) $\dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{AB}{AC}$; b) $HD \perp AC$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.185. Fie ABC un triunghi şi D, E, F puncte situate pe laturile BC, CA, respectiv AB. Paralela prin A la DE intersectează dreapta FD în punctul M. Să se demonstreze că punctul M aparţine liniei mijlocii paralele cu BC dacă şi numai dacă cevienele AD, BE şi CF sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VIII-a

VIII.179. Tetraedrul $OABC$ are $OA = OB = a$, $AB = b$, iar măsura unghiului diedru dintre planele (OAB) şi (ABC) este de $u°$. Determinaţi distanţa de la punctul O la planul (ABC).

Adrian Corduneanu, Iaşi

VII.180. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor AD, respectiv $A'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $\{S\} = BD' \cap (CMN)$, demonstraţi că punctele C, S, N sunt coliniare.

Mirela Marin, Iaşi

VII.181. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $a = (\sqrt{2014} + +1)(\sqrt{2014} - \sqrt{n})$ este raţional.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.182. Determinaţi numerele naturale $m \geq 2$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^n - 1$ divide $7^n - 1$.

Gabriel Nemţaru, Melineşti, Dolj

VII.183. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z \geq 3$. Arătaţi că $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 3 \geq 3(x + y + z)$.

Mihai Dicu şi Lucian Tuţescu, Craiova

VII.184. Dacă $a, b, c \in [0, 1]$ nu sunt toate nule, arătaţi că $\dfrac{ab}{abc + ab + c} + \dfrac{bc}{abc + bc + a} + \dfrac{ca}{abc + ca + b} \leq 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.185. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{2n-1} \cdot c + a^{n-1} \cdot b + 1 < 0$. Demonstraţi că $(a - c)^2 > (a + b + c)(a - b + c)$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.151. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bc + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Fie S şi P suma, respectiv produsul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$, iar $\alpha = f(S)$, $\beta = f(P)$. Găsiţi soluţiile ecuaţiei $\alpha(x - P)(1 - x) = \beta x$.

Cătălin Calistru, Iaşi

IX.152. Fie $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ şi numere $a_i \in (0, \infty)$, $x_i \in [0, \infty)$, $i = \overline{1, n}$. Arătaţi că

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{a_i} \geq \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j (x_i + x_j)}{a_i + a_j}.$$

Alexandru Blaga, Satu Mare

IX.153. Arătaţi că $\sum \frac{a^2}{r_a r_b} \geq 4$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

IX.154. Arătaţi că $\frac{3R}{2r} \geq \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_c} + \frac{l_c}{l_a}$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.

Vasile Jiglău, Arad

IX.155. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{BAC}) = 100°$. Arătaţi că $a^4 + 2b^4 + 2a^3b - 5ab^3 - 3a^2b^2 = 0$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Clasa a X-a

X.151. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$ şi $a > 0$ astfel încât $\lg x\sqrt{\lg y \cdot \lg z} + \lg y\sqrt{\lg x \cdot \lg z} + \lg z\sqrt{\lg x \cdot \lg y} \geq a$. Arătaţi că $xyz \geq 10^{\sqrt{3a}}$.

Lucian Tuţescu şi Camelia Dană, Craiova

X.152. a) Arătaţi că $\frac{7}{6} < \lg 16 < \frac{4}{3}$.

b) Determinaţi primele două cifre şi ultimele două cifre ale numărului 16^6, fără a-l calcula.

Ionel Tudor, Călugăreni

X.153. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este dat, determinaţi numerele reale a şi b pentru care numărul complex $z = \frac{a - i}{b + i}$ este rădăcină nereală de ordin n a unităţii.

Dan Popescu, Suceava

X.154. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte. Arătaţi că

$$\max\left(\frac{1}{|z_1 - z_2|}, \frac{1}{|z_2 - z_3|}, \frac{1}{|z_3 - z_1|}\right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3 + 3\max(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)}.$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

X.155. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ având proprietăţile

(i) f este injectivă şi g este surjectivă;

(ii) $f(0) = g(0) = 0$;

(iii) $|f(m) - f(n)| \leq |g(m) - g(n)|, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţi că cele două funcţii sunt egale.

Claudiu Mîndrilă, elev, Târgovişte

Clasa a XI-a

XI.151. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = (n + 1)^{x_n}$. Determinaţi numerele naturale n pentru care $x_{n+2} = x_{n+1}^3 + x_n$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

XI.152. Calculaţi $L_\alpha = \lim_{x\to\infty} ((x + 1)^\alpha \ln(x + 1) - x^\alpha \ln x)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

XI.153. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir şi propoziţiile: (P_1) ,,Şirul $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_2) ,,Şirul $(\max(a_n, a_{n+1}))_{n\geq 1}$ este convergent"; (P_3) ,,Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent". Arătaţi că:
a) (P_1) nu implică (P_3);
b) (P_2) nu implică (P_3);
c) (P_1) şi (P_2) implică (P_3).

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.154. Determinaţi numerele reale x cu proprietatea că $9^x+25^x=15^x+\dfrac{19}{225}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

XI.155. Se consideră matricele $A, B\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $AB=BA$ şi numărul $a\in \left(\dfrac{1}{4},\infty\right)$. Dacă $\det(A^2+AB+aB^2)=0$, arătaţi că $\det(A+B)=\det A+a\det B$.

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XII-a

XII.151. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=\dfrac{1}{2}+3X-4X^3$ şi $g\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right)=0$. Demonstraţi că f divide g.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.152. Pentru $n\in\mathbb{N}$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n şi cu $\varphi(n)$ numărul numerelor din mulţimea $\{1,2,\dots,n\}$ care sunt relativ prime cu n. Pentru $n\in\{p^\alpha | p=\text{prim}, \alpha\in\mathbb{N}$, caculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\sigma(n)\cdot\varphi(n)}}{n}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.153. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ fixat. Determinaţi funcţiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x)\cdot f(x)+\lambda(f(x))^2=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Sven Cortel, elev, Satu-Mare

XII.154. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $x^2f(x)\geq e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x\in(0,\infty)$. Arătaţi că funcţia f nu are primitive.

Florin Nicolaescu, Balş

XII.155. Determinaţi funcţiile continue $f, g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\}\leq\displaystyle\int_0^a f(x)\cdot g(x)dx$, $\forall a\in[0,\infty)$.

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G266. Determinaţi numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulţimea $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\subset\mathbb{N}$, există $B, C\subset A$ astfel încât $|B|=|C|=3$, $B\cap C=\emptyset$ şi $S_B+S_C\vdots 3$. (Am notat cu S_M suma elementelor mulţimii M.)

Cristian Lazăr, Iaşi