

XII.142. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ și funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea că $f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculați $\int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + 2013)(1 + f(x))}$.

D.M. Batinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

XII.143. Calculați $\int (x - \sin x + \cos x) \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 - \cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

XII.144. Demonstrați că nu există numere naturale n și m astfel încât 19 să dividă $5^n + 7^m$.

Marian Cucoaneș, Mărășești

XII.145. Fie $(A, +, \cdot)$ inel cu $1 \neq 0$, având un număr impar de elemente, în care are loc implicația: „dacă $x^2 - 2xy + y^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, atunci $x + y = 1 + 1 + 1 + 1$ ”. Dacă $1 + 1$ nu este divizor al lui zero, demonstrați că A este izomorf cu \mathbb{Z}_3 .

Florin Stănescu, Găești

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G246. Doi copii, A și B , joacă un joc. Acesta se desfășoară pe un careu format din $a \times b$ pătrățelele, în care a și b sunt numere naturale impare, propuse fiecare de către unul dintre cei doi copii. Jucătorii bifează, pe rând, câte o căsuță din careu, astfel: A începe jocul prin bifarea unui pătrățel (m, n) , unde m reprezintă linia, iar n coloana pătrățelului bifat. Apoi, B bifează unul dintre pătrățelele $(m \pm 1, n \pm 1)$ sau $(m \pm 3, n \pm 1)$, aflat în interiorul careului. De fiecare dată când un jucător vine la rând, el alege o poziție (p, q) deja bifată și are voie să bifeze una dintre pozițiile $(p \pm 1, q \pm 1)$ sau $(p \pm 3, q \pm 1)$ care este încă nebifată în careu. Pierde jucătorul care, atunci când îi vine rândul, nu mai are ce bifa.

Demonstrați că A are strategie de câștig.

Silviu Boga, Iași

G247. Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}, n \geq 6$, și X, Y două submulțimi disjuncte ale lui A , $X \cup Y = A$, având fiecare cel puțin trei elemente. Demonstrați că există $x, y \in X, x \neq y$ și $a, b \in Y, a \neq b$, astfel încât $x - y = a - b$.

Gheorghe Iurea, Iași

G248. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ arătați că numărul $5a(a^2 + 1)$ nu este pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iași

G249. Rezolvați în numere naturale ecuația $85^m - n^4 = 4$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

G250. Demonstrați că $a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{ab}(a - 2b)(b - 2a)$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b .

Gabriel Popa, Iași

G251. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $ab + bc + ca = 3$, arătați că $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6$.

Monica Golea, elevă, Craiova

G252. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și numerele reale pozitive x_1, x_2, \dots, x_n . Dacă $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, demonstrați că

$$\max \left(x_1 + \frac{1}{S - x_1}, x_2 + \frac{1}{S - x_2}, \dots, x_n + \frac{1}{S - x_n} \right) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Ani Drăghici și Mariana Mărculescu, Craiova

G253. Fie M un punct oarecare pe latura AB a pătratului $ABCD$. Bisectoarea unghiului \widehat{MDC} intersectează BC în N . Arătați că $BM + BN < AM + CN$.

Cecilia Deaconescu, Pitești

G254. Diagonalele trapezului $ABCD$ se intersectează în O . Paralela prin O la baza AB intersectează latura BC în P . Punctul Q este situat în semiplanul opus celui determinat de dreapta AD și punctul B , iar dreptele QB și QC intersectează AD în R , respectiv S . Demonstrați că dreptele PQ , BS și CR sunt concurente.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G255. Fie AB și AC tangentele din punctul A la un cerc \mathcal{C} (B și C fiind punctele de tangență) și \mathcal{R} regiunea din plan determinată de arcul mic \widehat{BC} al cercului \mathcal{C} și segmentele AB și AC . Demonstrați că $MN \leq \max(AB, AC)$, oricare ar fi punctele M și N din \mathcal{R} .

Marian Tetiva, Bârlad

B. Nivel liceal

L246. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90^\circ$, înscris în cercul \mathcal{C} . Pe latura BC se consideră punctele D și D' astfel încât $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BAD}'$. Cercul tangent dreptelor AD, BD și cercului \mathcal{C} este tangent segmentului BD în M . Cercul tangent dreptelor AD', CD' și cercului \mathcal{C} este tangent segmentului CD' în N . Arătați că $\frac{MN}{BC} \leq \sqrt{2} - 1$.

Neculai Roman, Mircești (Iași)

L247. Pe laturile BC, CA și AB ale triunghiului ABC se consideră punctele A_1, B_1 , respectiv C_1 astfel încât $AB + BA_1 = AC + CA_1$, $AB + AB_1 = BC + CB_1$ și $AC + AC_1 = BC + BC_1$. Dacă A_2, B_2 și C_2 sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA , respectiv AB , arătați că $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq A_2B_2^2 + B_2C_2^2 + C_2A_2^2$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L248. Demonstrați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{3(r_a + r_b + r_c)}{2p^2} \geq \frac{1}{r_a + r_b} + \frac{1}{r_b + r_c} + \frac{1}{r_c + r_a} \geq \frac{6}{5R + 2r}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgoviște

L249. Fie $ABCD$ un patrulater atât inscriptibil, cât și circumscriptibil. Dacă notăm cu e și f lungimile diagonalelor, demonstrați că $\frac{p}{\sqrt{2\sqrt{2}Rr}} \geq \frac{e+f}{\sqrt{ef}}$.

Vasile Jiglău, Arad

L250. Stabiliți pentru care dintre numerele $1, 2, \dots, 9$ este adevărată egalitatea $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{n} = \sqrt{3n}$.

Ionel Tudor, Călugăreni

L251. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și numerele reale nenegative x_1, x_2, \dots, x_n cu proprietatea că $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3n^2$. Demonstrați că $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3 \geq 9n(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$.

Lucian Tuțescu și Ionuț Ivănescu, Craiova

L252. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, și numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Se calculează toate sumele $a_i + a_j$, $i \neq j$, obținând t rezultate distincte. Demonstrați că $t \geq 2n - 3$ și că $t = 2n - 3$ dacă și numai dacă a_1, a_2, \dots, a_n este progresie aritmetică.

Titu Zvonaru, Comănești

L253. Fie a, b, c trei numere reale pozitive cu $a \leq c$ și $x, y, z \in [a, c]$ astfel încât $x + y + z = a + b + c$ și $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Arătați că numerele x, y și z coincid într-o anumită ordine, cu a, b și c .

Marian Tetiva, Bârlad

L254. Determinați numerele reale x, y, z din intervalul $[1, 3]$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ și $x^3 + y^3 + z^3 = 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

L255. Se consideră numerele reale $a < c < b$ și șirul $(x_n)_{n \geq 1}$. Orice subșir convergent al șirului (x_n) are limita a sau limita b . Notăm $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n \text{ și } x_k \leq c\}$ și $B_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n \text{ și } x_k > c\}$. Dacă există și este finită și nenulă limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card } A_n}{\text{card } B_n}$, arătați că șirul $y_n = \frac{x_1 + x_n + \dots + x_n}{n}$ este convergent și aflați limita sa (funcție de a, b și L). Studiați și cazurile $L = 0$ și $L = +\infty$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G246. Two children, A and B , play a game. This takes place on a rectangular square consisting of $a \times b$ small squares, where a and b are odd natural numbers, each of them proposed by one of the two children. The players mark, successively and once at a time, a cell in the table as it follows: A begins the game by marking a small square (m, n) , where m represents the row and n – the column of the marked cell. Then, B marks one of the cells $(m \pm 1, n \pm 3)$ or $(m \pm 3, n \pm 1)$, situated inside the big table. Every time when a player comes to his turn, he chooses an already marked position (p, q) and he is allowed to mark one of the positions $(p \pm 1, q \pm 3)$ or $(p \pm 3, q \pm 1)$ which is still blank on the table. The player who has no more cell to mark when its turn comes up loses the game. Prove that A has a strategy for winning.

Silviu Boga, Iași

G247. Let $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 6$, and X, Y be two disjoint subsets of the set A , $X \cup Y = A$, each of them consisting of at least three elements. Prove that four elements $x, y \in X$, $x \neq y$ and $a, b \in Y$, $a \neq b$ exist such that $x - y = a - b$.

Gheorghe Iurea, Iași

G248. If $a \in \mathbb{N}^*$ show that the number $5a(a^2 + 1)$ is not a perfect square.

Gheorghe Iurea, Iași

G249. Solve in natural numbers the equation $85^m - n^4 = 4$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

G250. Prove that $a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{ab}(a - 2b)(b - 2a)$, any would be the positive real numbers a and b .

Gabriel Popa, Iași

G251. If a, b, c are positive real numbers such that $ab + bc + ca = 3$, show that $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6$.

Monica Golea, elevă, Craiova

G252. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and consider the positive real numbers x_1, x_2, \dots, x_n . If $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, prove that

$$\max \left(x_1 + \frac{1}{S - x_1}, x_2 + \frac{1}{S - x_2}, \dots, x_n + \frac{1}{S - x_n} \right) \geq \frac{2}{\sqrt{n - 1}}.$$

Ani Drăghici și Mariana Mărculescu, Craiova

G253. Let M be an arbitrary point on the side AB of the square $ABCD$. The angle bisector of \widehat{MDC} intersects the side BC at point N . Show that $BM + BN < AM + CN$.

Cecilia Deaconescu, Pitești

G254. The diagonals of the trapezium $ABCD$ cut each other at point O . The line through O that is parallel to the base AB intersect the side BC at P . The point Q is situated in the opposite half-plane to the one determine by line AD and point B , and the lines QB and QC intersect AD at R , respectively at S . Prove that the lines PQ , BS and CR are concurrent.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G255. Let AB and AC be the tangents from point A to a circle \mathcal{C} (B and C being the points of contact) and let \mathcal{R} be the plane region closed by the small arc \widehat{BC} of circle \mathcal{C} and the line segments AB and AC . Prove that $MN \leq \max(AB, AC)$, any would be the points M and N in \mathcal{R} .

Marian Tetiva, Bârlad

B. Highschool Level

L246. Let us consider the triangle ABC with $m(\widehat{A}) \geq 90^\circ$, which is inscribed in the circle \mathcal{C} . The points D and D' are taken on the side BC such that $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$ and $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BAD'}$. The tangent circle to the lines AD , BD and to the circle \mathcal{C} is also tangent to the line segment BD at M . The circle tangent to the lines AD' , CD' and to circle \mathcal{C} is tangent to the line segment CD' at N . Show that $\frac{MN}{BC} \leq \sqrt{2} - 1$.

Neculai Roman, Mîrcești (Iași)

L247. Three points are considered on the sides BC , CA and AB of the triangle ABC , respectively denoted A_1, B_1 and C_1 , such that $AB + BA_1 = AC + CA_1$,

$AB + AB_1 = BC + CB_1$ and $AC + AC_1 = BC + BC_1$. If A_2, B_2 and C_2 are the contact points of the circle inscribed in triangle ABC with the sides BC, CA and respectively AB , show that $A_1 B_1^2 + B_1 C_1^2 + C_1 A_1^2 \geq A_2 B_2^2 + B_2 C_2^2 + C_2 A_2^2$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L248. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{3(r_a + r_b + r_c)}{2p^2} \geq \frac{1}{r_a + r_b} + \frac{1}{r_b + r_c} + \frac{1}{r_c + r_a} \geq \frac{6}{5R + 2r}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgoviște

L249. Let $ABCD$ be a bicentric quadrilateral, and let e and f denote the lengths of its diagonals. Prove that $\frac{p}{\sqrt{2\sqrt{2}Rr}} \geq \frac{e+f}{\sqrt{ef}}$.

Vasile Jiglău, Arad

L250. Establish which numbers n among $1, 2, \dots, 9$ satisfy the equation $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{n} = \sqrt{3n}$.

Ionel Tudor, Călugăreni

L251. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and consider the nonnegative numbers x_1, x_2, \dots, x_n with the property that $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3n^2$. Prove that $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3 \geq 9n(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$.

Lucian Tuțescu și Ionuț Ivănescu, Craiova

L252. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ and the real numbers $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. All the sums $a_i + a_j$, $i \neq j$ are calculated, giving distinct results. Prove that $t \geq 2n - 3$ and that $t = 2n - 3$ if and only if a_1, a_2, \dots, a_n is an arithmetic progression.

Titu Zvonaru, Comănești

L253. Let a, b, c be positive real numbers with $a \leq c$ and $x, y, z \in [a, c]$ such that $x + y + z = a + b + c$ and $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Show that the numbers x, y and z respectively coincide, in a certain order, with a, b and c .

Marian Tetiva, Bârlad

L254. Find the real numbers x, y, z in $[1, 3]$ such that $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, and $x^3 + y^3 + z^3 = 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

L255. The real numbers $a < c < b$ and the sequence $(x_n)_{n \geq 1}$ are considered. Any convergent subsequence of sequence (x_n) has limit a or limit b . Let us denote $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n \text{ and } x_k \leq c\}$ and $B_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n \text{ and } x_k > c\}$. If there exists the limit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{card} A_n}{\operatorname{card} B_n}$ and it is finite and nonzero, show that the sequence $y_n = \frac{x_1 + x_n + \dots + x_n}{n}$ converges and find its limit (as a function of a, b and L). Study the cases $L = 0$ and $L = +\infty$ as well.

Cristinel Mortici, Târgoviște