Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.269. Şapte forme geometrice sunt aşezate astfel: □ □ △ ▭ ▭ ▭ ▭ Mutaţi trei forme astfel încât în şirul obţinut triunghiul să fie la mijloc, iar pătratele să fie de o parte şi de alta a lui.
(*Clasa I*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

P.270. Afaţi numerele naturale a şi b astfel încât $a - 26 = 4 - b$.
(*Clasa I*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P.271. Din cei 28 elevi ai unei clase, 25 îndrăgesc fotbalul şi 24 tenisul. Fiecare dintre elevi îndrăgeşte cel puţin un sport. Câţi elevi îndrăgesc un singur sport?
(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P.272. În trei cutii sunt 80 de nasturi. Câţi nasturi sunt în fiecare cutie, dacă în primele două cutii sunt 64 nasturi, iar în ultimele două 41?
(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

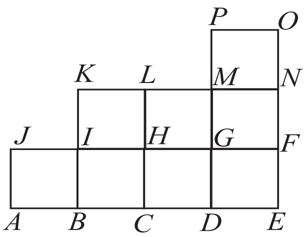
P.273. Există 12 numere mai mari ca zero, pare, diferite între ele şi care să aibă suma 154?
(*Clasa a II-a*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P.274. Într-o urnă sunt 34 de jetoane, pe fiecare fiind scris un număr; există jetoane cu numere de parităţi diferite. După ce s-au scos mai mult de 14 jetoane cu numere pare, în urnă au rămas tot atâtea jetoane cu numere pare. Câte jetoane cu numere impare sunt în urnă?
(*Clasa a II-a*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

P.275. Se dă şirul de numere $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$ Câte numere din şir, mai mici decât 500, au suma cifrelor 18?
(*Clasa a III-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

P.276. Să se afle a şi b ştiind că au loc egalităţile: $a : 2 - 15 = b : 3$, $a + b = 90$.
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Tololoi, elevă, Iaşi**

P.277. În desenul alăturat, tăiaţi un număr minim de segmente, de aceeaşi lungime cu segmentul AB, astfel înât să nu mai rămână nici un pătrat.
(*Clasa a III-a*) **Maria Nastasia, elevă, Iaşi**



P.278. Suma a patru numere naturale diferite este S. Dacă adăugăm 2 la primul număr, scădem 2 din al doilea număr, înmulţim cu 2 al treilea număr şi împărţim la 2 al patrulea număr, vom obţine acelaşi rezultat. Arătaţi că suma celor patru numere se împarte exact la 9.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.279. Suma a trei numere naturale nenule este zecimea produsului lor, iar suma ultimelor două este zecimea primului număr. Aflaţi suma celor 3 numere.
(*Clasa a IV-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2014.

P.280. Fie $\overline{abcde}$ un număr cu suma cifrelor patru. Arătaţi că, dacă împărţim acest număr la trei, obţinem restul 1.

(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gîlcă, elevă, Iaşi**

P.281. Fie un poligon cu 10 laturi astfel încât oricare trei vârfuri nu se află pe aceeaşi dreaptă. Câte segmente se formează prin unirea oricăror două vârfuri nealăturate?

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Simion, elevă, Iaşi**

P.282. În 10 coşuri sunt mere, pere şi gutui, în total 44 de fructe. În fiecare coş sunt fructe de toate felurile. Să se arate că există două coşuri care au acelaşi număr de mere, două coşuri care au acelaşi număr de pere şi două coşuri care au acelaşi număr de gutui.

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.165. Arătaţi că fracţia $\dfrac{3^{n+2}\cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} - 15^n}{\overline{abcabc}}$ este reductibilă.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.166. Numere $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ se scriu succesiv în câte una din 2013 căsuţe dispuse circular. În momentul în care ajungem la o căsuţă ocupată, ştergem numărul deja existent şi scriem noul număr. Aflaţi suma numerelor scrise în căsuţe imediat după ce s-a scris primul 2013.

Silviu Boga, Iaşi

V.167. În tabloul alăturat sunt scrise, în ordine crescătoare, toate pătratele perfecte care nu se divid cu 6. Dacă pe rândul 58 al 25-lea număr este x^2, determinaţi valoarea lui x.

1
4 9
16 25 49
64 81 100 121
....

Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi

V.168. a) Arătaţi că numărul 2^{2013} nu poate fi scris ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive.

b) Scrieţi numărul $3\cdot 2^{2013}$ ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive. Câte asemenea modalităţi de scriere există?

Elena Iurea, Iaşi

V.169. Demonstraţi că numărul $N = 2^{2^{2013}} + 27$ se divide cu 31.

Tamara Culac, Iaşi

V.170. Într-o urnă sunt 68 de bile. Două persoane joacă următorul joc: fiecare, alternativ, scoate din urnă între una şi cinci bile, până când urna se goleşte. Câştigă cel care a scos ultimul trei bile deodată. Care dintre cei doi jucători are strategie de câştig?

Mihai Crăciun, Paşcani

V.171. Considerăm numărul $n = 1\square 2\square 3\square \ldots \square 9$, unde în fiecare pătrăţel se află unul dintre semnele „$\cdot$" sau „:". Ştiind că n este număr natural, arătaţi că este par şi cel puţin egal cu 70.

Radu Miron, elev, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.165. Se consideră un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$, cu proprietatea că există punctul D pe latura BC astfel încât $BD = 2DC$ şi $m(\widehat{BAD}) = 90°$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

Elena Iurea, Iaşi

VI.166. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, şi fie D şi E picioarele bisectoarelor din B, respectiv C. Punctul F este astfel încât $DF \| CE$, $DF = BD$, iar E şi F sunt separate de AC. Demonstraţi că punctele B, C şi F sunt coliniare.

Ion Pătraşcu, Craiova

VI.167. Arătaţi că nu există numere prime de trei cifre, având produsul acestor cifre egal cu 210.

Mirela Marin, Iaşi

VI.168. Demonstraţi că numărul $A = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \ldots + \frac{1}{2013}$ nu este natural.

Doina Stoica şi Mircea Stoica, Arad

VI.169. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ şi numărul $n = a^2 + a^3 + \ldots + a^{2013}$. Demonstraţi că numărul $\frac{a+n}{1+a+a^2} - \frac{n}{1+a+a^2+a^3}$ este natural nenul.

Ionel Tudor, Călugăreni

VI.170. Stabiliţi care este cel mai mare număr de numere prime care pot fi găsite printre 15 numere naturale consecutive.

Constantin Dragomir, Piteşti

VI.171. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a cu proprietatea că a şi $a + 1$ sunt, fiecare, suma a câte trei pătrate perfecte nenule.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Clasa a VII-a

VII.165. Fie a, x, y numere reale strict pozitive cu proprietatea că $x(y - a) \geq y(a - x)$. Demonstraţi că $a^2 \leq xy$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

VII.166. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{x^2+4x+4+8y}{z} + \frac{y^2+4y+4+8z}{x} + \frac{z^2+4z+4+8x}{y} \geq 48.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

VII.167. Dacă ecuaţia $|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2013| = y(y+1)$ are o singură soluţie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, calculaţi $x_0 + y_0$.

Liviu Smarandache, Craiova

VII.168. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Arătaţi că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $n^2 + k^2$ să nu fie pătrat perfect, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k > p$.

Marian Panţiruc, Iaşi

VII.169. Fie D piciorul bisectoarei din A în triunghiul ABC. Cercul de diametru AD intersectează a doua oară laturile AB şi AC în mijloacele lor. Ce particularitate are triunghiul ABC? Dar raza cercului?

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VII.170. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Punctele D, E, P şi Q se află pe segmentele AC, AB, CE, respectiv BD, astfel încât $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACE}$, $DP \perp CE$ şi $EQ \perp BD$.

a) Demonstraţi că punctele A, D, E, P şi Q sunt conciclice.

b) Arătaţi că $DEQP$ este trapez dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Petru Asaftei, Iaşi

VII.171. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC, cu unghiul $\widehat{A}$ ascuţit. Perpendiculara în M pe BC taie dreapta AC în punctul N. Demonstraţi că $MN \cdot \sin A + MC \cdot \cos A \leq CN$. Când se atinge egalitatea?

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.165. Fie N şi P centrele feţelor $ABB'A'$, respectiv $ADD'A'$ ale unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă există un punct M pe diagonala (AC'), diferit de mijlocul acesteia, cu proprietatea că $MN \perp AB'$ şi $MP \perp AD'$, arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Ştefan Dominte, elev, Iaşi

VIII.166. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are muchia bazei $AB = a$ şi înălţimea $VO = h$. Determinaţi raza sferei înscrisă în piramidă.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VIII.167. Determinaţi numerele întregi k pentru care numărul $n = k^4 + 8k^3 - 35k^2 - 24k + 161$ este natural prim.

Mihai Haivas, Iaşi

VIII.168. Se consideră sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx^2 + dy^2 = \beta \end{cases}, \quad a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

Arătaţi că sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{d} = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$. Aflaţi soluţia sistemului în acest caz.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VIII.169. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3(a + b + c)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

VIII.170. Fie $m \in \mathbb{N}$ şi numerele reale a şi b cu $a+b \geq 0$. Arătaţi că $a^{2m+1}+b^{2m+1} \geq a^m b^m (a+b)$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VIII.171. Demonstraţi că nu există numere naturale nenule a, b şi c pentru care $a(a^2b^2+1) = c^2$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Clasa a IX-a

IX.141. Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{a+b^2+c^4+4}{d} + \frac{b+c^2+d^4+4}{a} + \frac{c+d^2+a^4+4}{b} + \frac{d+a^2+b^4+4}{c} \geq 28.$$

Cătălin Cristea, Craiova

IX.142. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x^4 - y^4) = (x-y)(x^2+y^2)(f(x)+f(y)), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ion Nedelcu, Ploieşti

IX.143. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^3$ sistemul

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+2x^2y^2\sin z = 1 \\ x^3+y^3-x^6y^6\sin^3 z = 1. \end{cases}$$

Vasile Chiriac, Bacău

IX.144. Se consideră triunghiul ADE, dreptunghic în D, şi triunghiul DAP, dreptunghic în A, astfel încât $(AE) \cap (DP) = \{G\}$ şi $2DE = AP$.

a) Arătaţi că există o infinitate de triunghiuri ABC în care AE este mediană, iar AD este înălţime.

b) Demonstraţi că cercurile circumscrise tuturor triunghiurilor ABC trec prin punctul P.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă Blaj

IX.145. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea $\dfrac{h_a}{i_a} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$, unde h_a şi i_a reprezintă lungimile înălţimii, respectiv bisectoarei din A.

Constantin Dragomir, Piteşti

Clasa a X-a

X.141. Rezolvaţi ecuaţia $2013^{x^3} + \log_{2013} x = 2013^{x^2}$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Aurel Chiriţă, Slatina

X.142. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe distincte, de modul 1, astfel încât $z_1z_2z_3 = (z_1+z_2+z_3)(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$. Arătaţi că cele trei numere sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Dimitru Săvulescu, Bucureşti

X.143. Determinaţi numerele reale $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ cu proprietatea că $2013^x + 1 = 2012^x + |\sin x - \cos x|$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

X.144. Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi $MN \| BC$, $PQ \| AC$, $RS \| AB$ astfel încât $MN \cap PQ \cap RS = \{H\}$, iar punctele M, N, P, Q, R şi S sunt situate pe laturile triunghiului. Arătaţi că:

a) $\frac{MN}{\sin A} + \frac{PQ}{\sin B} + \frac{RS}{\sin C} = 4R$;

b) $MN \cdot PQ \cdot RS \leq \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

X.145. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) = 60°$, iar punctele D şi E de pe latura BC sunt astfel încât AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, iar $AD = CE$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{CAD}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a XI-a

XI.141. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$ şi $\det(A + iB) = 0$. Calculaţi determinantul matricei $A^5 + A^4B + AB^4 + B^5$, funcţie de $a = \det A$.

Dan Popescu, Suceava

XI.142. Considerăm ecuaţia $X^2 + Y^2 + Z^2 + I_n = XY + XZ + YZ$, unde X, Y, Z sunt matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, care comută două câte două.

a) Arătaţi că ecuaţia nu are soluţii pentru n impar.

b) Dacă n este par, arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.143. Între unghiurile triunghiului ABC are loc relaţia $A^2 = B^2 + C^2$. Demonstraţi că $A \in \left[(\sqrt{2} - 1)\pi, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

XI.144. Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este astfel încât $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, iar $x_n(x_{n+1} - 1) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Determinaţi limita şirului.

Mihály Bencze, Braşov

XI.145. Se consideră funcţia derivabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu $f(a) = a$ şi $f(b) = b$. Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ astfel încât $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(x_n)} = n$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

XII.141. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + 1}$, calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t)dt$ şi $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)}dx - \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx$.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.142. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ şi funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea că $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calculaţi $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2 + 2013)(1 + f(x))}$.

D.M. Batineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.143. Calculaţi $\int (x - \sin x + \cos x)\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 - \cos x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

XII.144. Demonstraţi că nu există numere naturale n şi m astfel încât 19 să dividă $5^n + 7^m$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

XII.145. Fie $(A, +, \cdot)$ inel cu $1 \neq 0$, având un număr impar de elemente, în care are loc implicaţia: ,,dacă $x^2 - 2xy + y^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, atunci $x + y = 1 + 1 + 1 + 1$". Dacă $1 + 1$ nu este divizor al lui zero, demonstraţi că A este izomorf cu $\mathbb{Z}_3$.

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G246. Doi copii, A şi B, joacă un joc. Acesta se desfăşoară pe un careu format din $a \times b$ pătrăţelele, în care a şi b sunt numere naturale impare, propuse fiecare de către unul dintre cei doi copii. Jucătorii bifează, pe rând, câte o căsuţă din careu, astfel: A începe jocul prin bifarea unui pătrăţel (m, n), unde m reprezintă linia, iar n coloana pătrăţelului bifat. Apoi, B bifează unul dintre pătrăţelele $(m \pm 1, n \pm 3)$ sau $(m \pm 3, n \pm 1)$, aflat în interiorul careului. De fiecare dată când un jucător vine la rând, el alege o poziţie (p, q) deja bifată şi are voie să bifeze una dintre poziţiile $(p \pm 1, q \pm 3)$ sau $(p \pm 3, q \pm 1)$ care este încă nebifată în careu. Pierde jucătorul care, atunci când îi vine rândul, nu mai are ce bifa.

Demonstraţi că A are strategie de câştig.

Silviu Boga, Iaşi

G247. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \geq 6$, şi X, Y două submulţimi disjuncte ale lui A, $X \cup Y = A$, având fiecare cel puţin trei elemente. Demonstraţi că există $x, y \in X$, $x \neq y$ şi $a, b \in Y, a \neq b$, astfel încât $x - y = a - b$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G248. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ arătaţi că numărul $5a(a^2 + 1)$ nu este pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G249. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $85^m - n^4 = 4$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

G250. Demonstraţi că $a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{ab}(a - 2b)(b - 2a)$, oricare ar fi numerele reale pozitive a şi b.

Gabriel Popa, Iaşi

G251. Dacă a, b, c sunt numere reale poztive cu $ab + bc + ca = 3$, arătaţi că $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6$.

Monica Golea, elevă, Craiova