XII.133. Funcţia derivabilă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar $f : Img \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă astfel încât $f'(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că g este inversabilă, iar f este o primitivă a lui g^{-1}.

Dan Popescu, Suceava

XII.134. Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$ o funcţie integrabilă. Arătaţi că

$$\prod_{k=0}^{n} \int_a^b f^{2^k}(x)dx \leq (b-a)^n \int_a^b f^{2^{n+1}-1}(x)dx.$$

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

XII.135. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie impară şi continuă; arătaţi că

$$\int_0^{2\pi} xf(\cos x + \sin x)dx = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x + \sin x)dx.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G226. Câte dintre numerele de trei cifre în baza 10 se pot scrie sub forma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$?

Andrei Eckstein, Timişoara

G227. Se consideră mulţimea $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}\right\}$. Demonstraţi că pentru fiecare $n \in \{3, 4, \ldots, 15\}$, există o submulţme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a lui M şi o alegere convenabilă a semnelor astfel încât $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = 0$.

Gabriel Popa, Iaşi

G228. Spunem că numărul natural m are proprietatea (P) dacă există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a+b \leq 3m$ şi $\frac{7m+4}{11m+2} = \frac{a}{b}$. Notăm cu $E(n)$ numărul elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care au proprietatea (P). Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $E(n) = 2012$.

Vlad Emanuel, Bucureşti

G229. Se consideră numerele întregi distincte a, b, c şi d, cu proprietatea că $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 500$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 340$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G230. Arătaţi că $\frac{x}{y^3 + z^3 - 10} + \frac{y}{z^3 + x^3 - 10} + \frac{z}{x^3 + y^3 - 10} \leq \frac{1}{4}$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

G231. Arătaţi că oricum am aşeza 2012 puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură 2012, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât 46.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G232. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB \| CD$, $m(\widehat{B}) = 90°$ şi $AB = BC = a$. Notăm cu E mijlocul segmentului BC. Demonstraţi că AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ dacă şi numai dacă $CD = \dfrac{a}{4}$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G233. Determinaţi punctele M din planul triunghiului echilateral ABC cu proprietatea că $MB = 2MA$ şi $MC = 3MA$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G234. Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$, D un punct pe latura AC astfel încât $AD = AB$ şi M mijlocul laturii BC. Paralela la AC prin M intersectează pe BD în punctul E, iar dreapta AE intersectează latura BC în punctul F. Dacă paralela prin F la AC intersectează pe BD în punctul T, demonstraţi că $\widehat{BAT} \equiv \widehat{MAC}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G235. Fie ABC un triunghi ascuţiunghic, M punctul în care bisectoarea din A retaie cercul circumscris, iar I centrul cercului înscris. Fie D piciorul înălţimii din A, iar N şi P sunt proiecţiile punctului I pe BC, respectiv AD. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

B. Nivel liceal

L226. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului oarecare ABC, iar A_1 centrul cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi laturilor $[AB], [AC]$. În mod analog construim punctele B_1 şi C_1. Fie A_2 centrul cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $[AB$, $[AC$ şi în mod similar construim punctele B_2 şi C_2. Arătaţi că $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L227. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, D un punct pe latura BC şi M simetricul lui A faţă de D. Dacă $\dfrac{BM^2}{AB} + \dfrac{CM^2}{AC} = AB + AC$, arătaţi că AD este bisectoare sau înălţime în $\triangle ABC$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L228. În triunghiul ABC considerăm simedianele AD şi BE, având mijloacele P, respectiv Q. Demonstraţi că $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{ABP}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L229. Considerăm cercurile de ecuaţii $x^2+2Rx+y^2 = 0$, respectiv $x^2-2Rx+y^2 = 0$ şi fie C_1 şi C_2 centrele lor. Cercul cu centrul în $C(0, y)$ cu $y > 0$ este tangent celor două cercuri date. Fie $S = S(\alpha)$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ aria suprafeţei din semiplanul superior mărginită de cele 3 cercuri, unde α este măsura (în radiani) a unghiurilor de la baza $\triangle C_1C_2C$. Demonstraţi că funcţia $S = S(\alpha)$ este strict crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi calculaţi $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L230. Pentru $x \in \mathbb{R}$, demonstraţi inegalităţile:

a) $\sqrt{1 + 2\cos^2 x} \cdot \sin^2 x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} \cdot \cos^2 x + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \geq |\sin x| + |\cos x|$;

b) $\sqrt{3-2\sin^4 x}\cdot\sin^4 x+\sqrt{3-2\cos^4 x}\cdot\cos^4 x\geq 1-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Mihály Bencze, Braşov

L231. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala d. Arătaţi că

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4}+\frac{d^4}{ad^4+by^4}+\frac{d^4}{ad^4+bz^4}\geq\frac{3a+2b}{a(a+b)},$$

oricare ar fi $a>0$ şi $b\geq 0$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L232. Dacă $a\geq b\geq c>0$, arătaţi că are loc inegalitatea

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\geq(a^3-c^3)\sqrt{(a^3-b^3)(b^3-c^3)}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L233. Fie $n\geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu proprietatea că $a_1+a_2+\ldots+a_n\leq 1$. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a_1}{a_1^3+a_1^2+1}+\frac{a_2}{a_2^3+a_2^2+1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n^3+a_n^2+1}\leq\frac{n^3}{n^3+n+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L234. Determinaţi mulţimile A de numere reale cu proprietatea „$x, y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\in A\Rightarrow x^3+y^3\in A$".

Vlad Emanuel, Bucureşti

L235. Fie $f: I\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu derivata a doua mărginită pe intervalul I. Demonstraţi că există un număr $k\geq 0$ (depinzând de funcţia f) astfel încât inegalitatea

$$f(x)+f(y)+6f\left(\frac{x+y}{2}\right)+k(x-y)^2\geq 4\left[f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right]$$

să fie adevărată pentru orice $x, y\in I$.

Marian Tetiva, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G226. How many among the numbers of three digits in basis 10 can be written under the form $\overline{abc}+\overline{ab}+a$?

Andrei Eckstein, Timişoara

G227. It is considered the set $M=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}\right\}$. Prove that, for each $n\in\{3, 4, \ldots, 15\}$, there is a subset $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ of M and an appropriate selection of the signs so that $a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n=0$.

Gabriel Popa, Iaşi

G228. Let us say that the natural number m has the property (P) if there are $a, b \in \mathbb{N}^*$ such that $a + b \leq 3m$ and $\dfrac{7m+4}{11m+2} = \dfrac{a}{b}$. We say that $E(n)$ is the number of elements in the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ that own property (P). Determine $n \in \mathbb{N}^*$ such that $E(n) = 2012$.

Vlad Emanuel, Bucureşti

G229. There are considered the distinct integer numbers a, b, c and d, with the property that $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 500$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 340$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G230. Show that $\dfrac{x}{y^3+z^3-10} + \dfrac{y}{z^3+x^3-10} + \dfrac{z}{x^3+y^3-10} \leq \dfrac{1}{4}, \forall x, y, z \in [-1, 0)$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

G231. Show that, whichever 2012 points are arranged inside an equilateral triangle of side length 2012, there are at least two points so that the distance between them is less than 46.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G232. Let $ABCD$ be a right-angled trapezium with $AB \| CD$, $m(\widehat{B}) = 90°$ and $AB = BC = a$. Let E be the middle point of BC. Prove that AE is the angle-bisector of $\widehat{BAD}$ if and only if $OD = \dfrac{a}{4}$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G233. Determine the points in the plane of the equilateral triangle ABC with the property that $MB = 2\,MA$ and $MC = 3\,MA$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G234. Let ABC be a triangle with $AB < AC$, D a point on the side AC such that $AD = AB$ and $M =$ the midpoint of the side BC. The parallel to AC prin M intersects BD at point E, and the line AE intersects the side BD at point F. If the parallel through F to AC intersects BD at point T, show that $\widehat{BAT} \equiv \widehat{MAC}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G235. Let ABC be an acute-angled triangle, with $M =$ the point where the angle-bisector from A cuts the circumcircle again, and let I be the centre of the inscribed circle. Let D be the foot of the altitude from A, and let N and P be the projections of point I on BC, respectively AD. Show that the points M, N and P are collinear.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

B. Highschool Level

L226. Let $\mathcal{C}$ be the circumcircle of an arbitrary (scalene) triangle ABC and let A_1 be the centre of the circle wich is tangent from inside to circle $\mathcal{C}$ and to the sides $[AB], [AC]$. The points B_1 and C_1 are analogously built. Let A_2 be the centre of the exterior circle which is tangent to $\mathcal{C}$ and to the half-lines $[AB$, $[AC$. The next points B_2 şi C_2 are similarly built. Show that $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L227. Let ABC be an acute-angled triangle, D a point on the side BC and $M =$the symmetric point of A with respect to D. If $\dfrac{BM^2}{AB} + \dfrac{CM^2}{AC} = AB + AC$, show that AD is an angle-bisector or an altitude in $\triangle ABC$.

Titu Zvonaru, Comăneşti and Neculai Stanciu, Buzău

L228. We consider, in the triangle ABC, the symmedians AD and BE with their midpoints P and respectively Q. Show that $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{ABP}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L229. We consider the circles of equations $x^2 + 2Rx + y^2 = 0$, respectively $x^2 - 2Rx + y^2 = 0$ and let C_1, C_2 be their centres. The circle with its centre at $C(0, y), y > 0$ is tangent to the two given circles. Let $S = S(\alpha), 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ be the area in the superior (positive) half-plane of the zone bounded by the three circles, where α is the measure in radians of the angles at the base of $\triangle C_1C_2C$. Prove that the function $S = S(\alpha)$ is strictly increasing on the interval $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ and calculate $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L230. For $x \in \mathbb{R}$, prove the inequalities:

a) $\sqrt{1 + 2\cos^2 x} \cdot \sin^2 x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} \cdot \cos^2 x + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \geq |\sin x| + |\cos x|$;

b) $\sqrt{3 - 2\sin^4 x} \cdot \sin^4 x + \sqrt{3 - 2\cos^4 x} \cdot \cos^4 x \geq 1 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Mihály Bencze, Braşov

L231. A right-angled parallelepiped has the dimensions (edge lengths) x, y, z and the diagonal d. Show that

$$\frac{d^4}{ad^4 + bx^4} + \frac{d^4}{ad^4 + by^4} + \frac{d^4}{ad^4 + bz^4} \geq \frac{3a + 2b}{a\,(a + b)}$$

for all $a > 0$ and $b \geq 0$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L232. If $a \geq b \geq c > 0$, show that the following inequality holds:

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq (a^3 - c^3)\sqrt{(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L233. Let $n \geq 2$ be a natural number and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be some real positive numbers such that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$. Prove the following inequality:

$$\frac{a_1}{a_1^3 + a_1^2 + 1} + \frac{a_2}{a_2^3 + a_2^2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^3 + a_n^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^3 + n + 1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L234. Determine the sets A of real numbers with the property "$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \in A \Rightarrow x^3 + y^3 \in A$".

Vlad Emanuel, Bucureşti

L235. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a twice differentiable function with its second derivative bounded on the interval I. Show that there is a number $k \geq 0$ (depending on function f) so that the inequality

$$f(x) + f(y) + 6f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k(x-y)^2 \geq 4\left[f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right]$$

hold true for any $x, y \in I$.

Marian Tetiva, Bârlad
