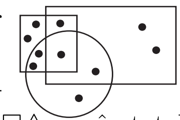
Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.240. Alina are 14 baloane roşii şi verzi. Baloane verzi are cel mult 5. Câte baloane roşii poate avea Alina?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.241. Completaţi casetele cu semnele + sau − astfel încât scrierea
$1\square 2\square 3\square 4 = 12\square 2\square 1\square 3\square 4$ să fie corectă. Daţi cel puţin două soluţii.
(*Clasa I*) **Paula Balan, elevă, Iaşi**

P.242. Câte puncte se află în interiorul pătratului şi cercului, dar nu şi în interiorul dreptunghiului?
(*Clasa I*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**



P.243. Un elev realizează următoarea structură: $\triangle\square\triangle\square\square\triangle\square\square\square\triangle\ldots$, în total 44 forme geometrice. Există o porţiune a structurii în care să se găsească exact trei triunghiuri, iar numărul dreptunghiurilor să fie 20?
(*Clasa a II-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.244. Avem două vase, unul de 5 litri şi celălalt de 8 litri. Cum măsurăm 4 litri de apă?
(*Clasa a II-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

P.245. Dacă a este cel mai mare număr natural par mai mic decât 902, iar b este cel mai mare număr de trei cifre diferite cu suma 10, să se arate că

$$\underbrace{(b-a)+(b-a)+\ldots+(b-a)}_{90\ \text{termeni}}=a.$$

(*Clasa a II-a*) **Lidia Balica, elevă, Iaşi**

P.246. Cele două verişoare, Oana şi Camelia, au primit mere de la bunica lor. Oana spune:
– Dă-mi 2 mere, pentru a avea cât tine!
Camelia răspunde:
– Dă-mi tu 2 mere, pentru ca merele rămase ţie să reprezinte jumătate din cât voi avea eu!
Câte mere a primit fiecare?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.247. Într-o cutie sunt bile. Triplăm numărul bilelor şi scoatem din cutie 17 bile, apoi triplăm numărul bilelor rămase şi iar scoatem 17 bile ş.a.m.d. Putem goli cutia prin repetarea acestei operaţii?
(*Clasa a III-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

P.248. O elevă a cules mere. Văzând că poate forma un număr exact de grupe de 10 mere, eleva dă câte trei mere din fiecare grupă unui cămin de bătrâni şi constată

[1]Se primesc soluţii până la data de 15 ianuarie 2013.

că diferenţa dintre numărul merelor care i-au rămas şi cel al merelor date este 36. Câte mere a culese eleva?

(*Clasa a III-a*) **Ioana Grăunte, elevă, Iaşi**

P.249. Arătaţi că numărul $343\,343\,343\ldots3437$ (2012 grupe de 343) se împarte exact la 7.

(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P.250. Patru fraţi au împreună 45 de ani. Vârstele lor ar deveni egale dacă primul ar avea cu doi ani mai mult, al doilea cu doi ani mai puţin, al treilea de două ori mai mult decât are, iar al patrulea jumătate din vârsta pe care o are. Câţi ani are fiecare?

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valeria Avasâlcei, Iaşi**

P.251. Se consideră următorul şir de perechi de numere: $(1,100), (2,99), (3,98)$, $\ldots$, $(100,1)$. Câte perechi (x,y) din şir au proprietatea $3x < 5y$?

(*Clasa a IV-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

P.252. Se consideră şirul $3; 4; 6; 9; 13; 18; 24; \ldots$.

a) Scrieţi al 100-lea termen al şirului.

b) Arătaţi că termenul de pe locul 1113334 se împarte exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.253. Vârstele a doi fraţi sunt două numere impare consecutive, iar vârsta tatălui lor este de patru ori mai mare decât vârsta fiului cel mare.

a) Arătaţi că suma vârstelor tatălui şi fiilor se împarte exact la 4, dar nu şi la 3.

b) Care din numerele $32, 44, 52$ poate să reprezinte suma vârstelor lor?

(*Clasa a IV-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

P.254. Cinci elevi joacă următorul joc. Primul scrie pe tablă două numere distincte. Al doilea le înlocuieşte cu suma şi diferenţa lor; la fel şi ceilalţi trei elevi. În final, pe tablă sunt scrise două numere a căror sumă este 128 şi a căror diferenţă este 8. Ce numere a scris primul elev pe tablă?

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.151. Determinaţi cifra x (în baza 10) pentru care $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \overline{x6x}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.152. Determinaţi restul împărţirii numărului $A = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2012}$ prin 60.

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

V.153. Demonstraţi că numărul 3^{225} are cel puţin 101 cifre.

Constantin Dragomir, Piteşti

V.154. Demonstraţi că există o infinitate de pătrate perfecte cu ultimele două cifre ale scrierii zecimale egale cu 69.

Cristian Lazăr, Iaşi

V.155. Se consideră numărul natural $A = 1\underbrace{00\ldots0}_{2012 \text{ de } 0}44$. Demonstraţi că A nu este nici pătrat perfect nici cub perfect.

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

V.156. Fie succesiunea de cifre 1 şi 0 următoare: 10110111011110111110 . . .
a) A 2012-a cifră este 0 sau 1?
b) Câţi de 0 sunt înaintea de a 2012-a cifră? Dar de 1?

Temistocle Bîrsan, Iaşi

V.157. Pe un cerc se află 160 de bile, numerotate în ordine crescătoare de la 1 la 160. Începând cu bila 1, se elimină bilele, din două în două, până rămâne una singură. Ce număr este scris pe bila rămasă?

Petre Bătrâneţu, Galaţi

Clasa a VI-a

VI.151. Fie numerele $p_1, p_2, \ldots, p_6$ prime şi cel puţin egale cu 5. Arătaţi că suma $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_6^2$ se divide cu 6, dar nu se divide cu 12.

Camelia Dană, Craiova

VI.152. Demonstraţi că nu există a şi b cifre nenule pentru care $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \overline{a,b} + \overline{b,a}$.

Bianca Petrescu, elevă, Iaşi

VI.153. Determinaţi numărul soluţiilor întregi ale ecuaţiei $x^2 + y^2 + z^2 = |x| - |y| + z$.

Elena Iurea, Iaşi

VI.154. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.155. La împărţirea a două numere naturale nenule, deîmpărţitul şi împărţitorul sunt direct proporţionale cu restul, respectiv câtul. Restul şi câtul sunt prime între ele. Arătaţi că deîmpărţitul este pătrat perfect şi aflaţi cele mai mici trei valori posibile ale acestuia.

Gheorghe Bumbăcea, Buşteni

VI.156. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) = 30°$. Punctul D se află în interiorul unghiului $\widehat{ACB}$, astfel încât $m(\widehat{DCB}) = 15°$ şi $m(\widehat{DBA}) = 75°$. Demonstraţi că $AC = AD$.

Petrişor Rocşoreanu, Craiova

VI.157. Se consideră triunghiul ABC cu $AC = 1$, $m(\widehat{B}) = 10°$ şi $m(\widehat{C}) = 20°$. Demonstraţi că perimetrul triunghiului este mai mic decât 6.

Petre Bătrâneţu, Galaţi

Clasa a VII-a

VII.151. Comparaţi numerele $A = 4\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$ şi $B = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{3} + 1)\sqrt{5 - \sqrt{5}}$.

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

VII.152. Determinaţi numere prime p, q şi r, ştiind că $2^p = 2012 + q^2 r^2$.

Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

VII.153. Dacă n este număr natural par, arătaţi că putem alege $p \in \{3, 5, 6\}$ astfel încât numărul $2^n + 5^n + p$ să fie multiplu al lui 7.

Radu Gologan, Bucureşti

VII.154. Demonstraţi că nu există numere întregi x cu proprietatea că

$$x^5 + (x+1)^5 + \ldots + (x+10)^5 = 13311332.$$

Ştefan Dominte, elev, Iaşi

VII.155. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale nenule a, b, c, d astfel încât $a^3 = b^2 + c^4 + d^8$.

Lucian Tuţescu, Craiova

VII.156. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, astfel încât raportul $k = \dfrac{AB}{CD}$ este număr raţional. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Arătaţi că $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOB}}} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{COD}}} \in \mathbb{Q}$.

b) Dacă, în plus, $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOD}}} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{BOC}}} \in \mathbb{Q}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.157. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$ şi fie M un punct pe latura AC. Demonstraţi că $\widehat{MBC} \equiv \widehat{A}$ dacă şi numai dacă $MB^2 = AC \cdot MC$.

Mirela Marin, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.151. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, demonstraţi identitatea

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)^2 = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4.$$

Marian Tetiva, Bârlad

VIII.152. Determinaţi numerele reale x, y şi z pentru care $x^2 - y^2 = x - y + 2z$, $y^2 - z^2 = y + z + 2x$ şi $z^2 - x^2 = x - z + 2y$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.153. Fie numerele a, x, y, z reale, pozitive şi astfel încât $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geq a$. Arătaţi că $x + y + z \geq \sqrt{3a}$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

VIII.154. Dacă $n \in \mathbb{Z}$, considerăm $A_n = n^6 + (n+3)^6 + (3n+4)^6 + (3n+5)^6$. Demonstraţi că A_n se divide cu $2n^2 + 6n + 5$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VIII.155. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1$, calculaţi xyz.

Lenuţa Andrei, Craiova

VIII.156. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a, notăm cu N mijlocul muchiei $A'D'$. Arătaţi că dreptele BN şi DC' sunt perpendiculare şi calculaţi distanţa dintre ele.

Mirela Marin, Iaşi

VIII.157. Arătaţi că suma distanţelor de la centrul de greutate al unui tetraedru la feţele sale este cel puţin egală cu suma distanţelor de la centrul sferei înscrise în tetraedru la feţele acestuia.

Aurel Bârsan, Braşov

Clasa a IX-a

IX.131. Rezolvaţi ecuaţiile:
a) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$;
b) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = -\frac{5}{4}$.

Mariana Mărculescu, Craiova

IX.132. Demonstraţi că $\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n+1)^2}}{2}\right] = \left[\dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.133. Determinaţi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ din intervalul $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, ştiind că şirurile $(\sin a_n)_{n\geq 1}$ şi $(\cos a_n)_{n\geq 1}$ sunt progresii geometrice.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

IX.134. Fie $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ un şir de triunghiuri dreptunghice coplanare, fiecare având câte un unghi ascuţit de $30°$, astfel încât ipotenuza lui Δ_{n+1} este cateta opusă unghiului de $30°$ în triunghiul Δ_n, iar celelalte două laturi ale lui Δ_{n+1} sunt în interiorul lui Δ_n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că există un unic punct M situat în interiorul tuturor triunghiurilor Δ_n, iar distanţele $a_n = MA_n$ formează o progresie geometrică de raţie $q = \dfrac{1}{2}$.

Silviu Boga, Iaşi

IX.135. Arătaţi că două triunghiuri care au egale perimetrele, razele cercurilor înscrise şi câte o înălţime sunt congruente.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.131. Într-o urnă se află 2 bile albe şi 3 bile negre, iar în altă urnă se află 4 bile albe şi 1 bilă neagră. Se alege aleator o urnă, din care se extrage o bilă. Considerăm evenimentul B: bila extrasă este albă, iar A este un eveniment compatibil cu B astfel încât $P(A\cup B) = \dfrac{4}{5}$ şi $P_A(B) = P(B)$. Calculaţi $P(A)$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

X.132. Demonstraţi că $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 70°} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 50°} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 10°} \geq 3$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

X.133. Determinaţi tripletele de numere complexe nenule (x, y, z) pentru care $\frac{1}{x^6+\overline{x}^6}+\frac{1}{y^6+\overline{y}^6}+\frac{1}{z^6+\overline{z}^6}=\frac{3}{2|xyz|^2}$.

Florin Stănescu, Găeşti

X.134. Fie A şi B două puncte fixate pe un cerc de centru O şi rază R, astfel încât $m(\widehat{AOB})=2\alpha<90°$. Determinaţi două puncte C şi D ale cercului astfel încât aria patrulaterului $ABCD$ să fie maximă.

Adrian Corduneanu şi Paul Georgescu, Iaşi

X.135. Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{\cos^2 A}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{\cos^2 B}{\sin A\cdot\sin C}+\frac{\cos^2 C}{\sin A\cdot\sin B}\geq 1.$$

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.131. Se consideră un triunghi ABC, cu notaţii uzuale. Arătaţi că $S=\frac{1}{4}\sqrt{|V(a,b,c)|}$, unde $V(a,b,c)=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ a & 0 & c & b\\ b & c & 0 & a\\ c & b & a & 0\end{vmatrix}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

XI.132. Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ care au proprietatea că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\cdot 2012^{2xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, iar $f(1)=2012^2$.

Carmen Liana Georgescu, Craiova

XI.133. Dacă $u_n=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{u_1u_2\dots u_{n+1}}-\sqrt[n]{u_1u_2\dots u_n})$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XI.134. Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Dacă $A^2=\{x^2 : x\in A\}$, determinaţi intervalele mărginite de numere reale $I\subset\mathbb{R}$ care satisfac relaţia $I^2=I$.

Dan Popescu, Suceava

XI.135. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 cu proprietatea că $(b-a)f'(a)=f(b)-f(a)$. Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ pentru care $f'(c)-f''(c)=f'(a)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Clasa a XII-a

XII.131. Fie $n\geq 2$ un număr natural pentru care există un element $\widehat{a}$ al inelului $\mathbb{Z}_n$ cu proprietatea că $-\widehat{a}=\widehat{a}^{-1}$.

a) Dacă $a<\sqrt{n}$, demonstrati că $n=a^2+1$.

b) Arătaţi că există $n\geq 2$ şi a astfel încât $n\neq a^2+1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

XII.132. Fie $p\geq 5$ un număr prim. Demonstraţi că numărul $3^{p-1}-2^{p-1}$ se divide cu p, insă 3^p-2^p nu se divide cu p.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

XII.133. Funcţia derivabilă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar $f : Img \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă astfel încât $f'(g(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că g este inversabilă, iar f este o primitivă a lui g^{-1}.

Dan Popescu, Suceava

XII.134. Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie integrabilă. Arătaţi că

$$\prod_{k=0}^{n} \int_a^b f^{2^k}(x)dx \leq (b-a)^n \int_a^b f^{2^{n+1}-1}(x)dx.$$

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

XII.135. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie impară şi continuă; arătaţi că

$$\int_0^{2\pi} xf(\cos x + \sin x)dx = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x + \sin x)dx.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G226. Câte dintre numerele de trei cifre în baza 10 se pot scrie sub forma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$?

Andrei Eckstein, Timişoara

G227. Se consideră mulţimea $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}\right\}$. Demonstraţi că pentru fiecare $n \in \{3, 4, \ldots, 15\}$, există o submulţme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a lui M şi o alegere convenabilă a semnelor astfel încât $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n = 0$.

Gabriel Popa, Iaşi

G228. Spunem că numărul natural m are proprietatea (P) dacă există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a+b \leq 3m$ şi $\frac{7m+4}{11m+2} = \frac{a}{b}$. Notăm cu $E(n)$ numărul elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care au proprietatea (P). Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $E(n) = 2012$.

Vlad Emanuel, Bucureşti

G229. Se consideră numerele întregi distincte a, b, c şi d, cu proprietatea că $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 500$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 340$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G230. Arătaţi că $\frac{x}{y^3 + z^3 - 10} + \frac{y}{z^3 + x^3 - 10} + \frac{z}{x^3 + y^3 - 10} \leq \frac{1}{4}$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

G231. Arătaţi că oricum am aşeza 2012 puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură 2012, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât 46.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova