Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.216. Fie numerele $a = 1 + \bigcirc$ şi $b = 9 - \square$. Înlocuiţi cercul şi pătratul cu cifre corespunzătoare astfel încât $a + b = 15$.
(*Clasa I*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

P.217. O elevă a desenat un trenuleţ cu 23 vagoane pe care le-a colorat folosind, pe rând, culorile roşu, galben, albastru, roşu, galben ş.a.m.d. Ce culoare a folosit pentru vagonul din mijloc?
(*Clasa I*) **Mihaela Gîlcă, elevă, Iaşi**

P.218. Mihaela are 14 ani. Ea s-a născut când sora sa avea 7 ani, dar cu 5 ani înaintea fratelui său. Câţi ani au împreună cei trei fraţi?
(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

P.219. Un cioban păzea câteva oi şi câteva capre, în total 24 picioare. Câte oi şi câte capre sunt, dacă oile sunt mai multe decât caprele?
(*Clasa a II-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.220. Suma a două numere este 2011. Dacă ştergem cifra miilor unuia dintre ele, obţinem celălalt număr. Aflaţi cele două numere.
(*Clasa a III-a*) **Mihaela Cianga, Iaşi**

P.221. Suma dintre un număr şi succesorul său este cu 10 mai mare decât predecesorul său. Calculaţi produsul dintre număr şi vecinii săi.
(*Clasa a III-a*) **Petru Miron, Paşcani**

P.222. Pe o farfurie sunt cireşe şi vişine. Un copil mănâncă o treime din cireşe şi o jumătate din vişine şi constată că are 17 sâmburi. Pot rămâne pe farfurie 20 fructe? dar 34?
(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P.223. Se consideră numerele naturale $x, 4x, 2x + 3, x + 2$ şi $3x + 2$, unde $x > 2$.

a) Ordonaţi crescător numerele.

b) Dacă notăm cu m cel mai mic număr şi cu M pe cel mai mare, care trebuie să fie valoarea lui x pentru ca şirul $m, m + 1, \ldots, M$ să conţină 130 numere?
(*Clasa a IV-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.224. Un elev îşi ţine banii în două buzunare. Dacă ar cheltui un sfert din suma din primul buzunar şi o doime din cea din al doilea, suma totală s-ar micşora cu 48 lei. Care ar fi suma totală dacă s-ar dubla suma din al doilea buzunar?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P.225. Aflaţi numerele de trei cifre distincte $\overline{abc}$, dacă $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 666$.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2011

Clasa a V-a

V.137. Se consideră numerele naturale $A = 1^{2010} + 2^{2010} + \ldots + 9^{2010}$ şi $B = 1^{2011} + 2^{2011} + \ldots + 9^{2011}$. Demonstraţi că $B - A$ se divide cu 10.

Mariana Mărculescu şi Dumitru Cotoi, Craiova

V.138. Găsiţi un multiplu al lui 13 a cărui scriere în baza 10 conţine doar cifre de 1.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.139. Scrieţi numărul 17689 ca diferenţă de două pătrate perfecte.

Liviu Smarandache, Craiova

V.140. Determinaţi numerele de forma $\overline{5abc}$ care, împăţite la $\overline{abc5}$, dau câtul de 595 ori mai mic decât restul.

Petru Asaftei, Iaşi

V.141. Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 = 1$ şi fiecare număr, începând cu al doilea, este triplul sumei tuturor numerelor dinaintea lui. Dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^{20}$, determinaţi n.

Mirela Marin, Iaşi

V.142. Arătaţi că numărul $A = \overline{\underbrace{11\ldots11}_{2011}\underbrace{22\ldots22}_{2011}} + \overline{\underbrace{33\ldots33}_{2011}\underbrace{44\ldots44}_{2011}} - \overline{\underbrace{11\ldots11}_{2011}0}$ este pătrat perfect.

Andrei Nedelcu, Iaşi

V.143. Reconstituiţi înmulţirea alăturată, ştiind că literele distincte reprezintă cifre distincte.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \times \\
 & & & & & * & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & & & & \mathrm{f} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \\
 & & & & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & & \\
 & & & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & & & \\
 & & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & & & & \\
 & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{a} & & & & & \\
\mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & & & & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * &
\end{array}$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.137. Dacă fracţia $\dfrac{3n+7}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, este reductibilă, determinaţi ultima cifră a lui n.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

VI.138. Determinaţi numerele prime $\overline{abc}$ cu proprietatea că dintre cele cinci numere (nu obligatoriu distincte) care se obţin prin permutarea cifrelor, există măcar două pătrate perfecte.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.139. Demonstraţi că $287 | (8^{15} + 8^5 + 5)(42^{117} + 42^{39} + 39)$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

VI.140. Determinaţi numerele întregi nenule $n_1 < n_2 < \ldots < n_7$, dacă $2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_7} = \dfrac{985}{1024}$.

Mihai Haivas, Iaşi

VI.141. Demonstraţi că ecuaţia $12x + 15y + 20z = 73$ nu are soluţii (x, y, z) cu toate componentele numere naturale, dar are o infinitate de soluţii cu toate componentele numere întregi.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.142. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$. Dacă D este simetricul lui B faţă de C şi mediana din B taie AD în E, arătaţi că CE este mediatoarea segmentului BD.

Silviu Boga, Iaşi

VI.143. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{ACB}) = 45°$ şi $m(\widehat{CBA}) = 30°$, iar M este un punct pe segmentul AB. Arătaţi că M este mijlocul lui AB dacă şi numai dacă $m(\widehat{MCB}) = 15°$.

Andrei Paşa, elev, şi Narcisa Paşa, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.137. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, arătaţi că $(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) \geq x + y + 1$.

Gheorghiţa Stănică şi Iulian Stănică, Apele Vii (Dolj)

VII.138. Dacă a, b, c sunt numere întregi distincte, arătaţi că $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc \geq 1$. Când se realizează egalitatea?

Elena Iurea, Iaşi

VII.139. Determinaţi cifrele a, b şi c, dacă $\sqrt{\dfrac{\overline{aa}}{\overline{b,b(bc)}}} \in \mathbb{N}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VII.140. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi cu proprietatea că $2^{x+y}(2^{x^2+y^2} + 1) = 1$.

Neculai Stanciu, Buzău

VII.141. Dacă $ABCD$ este un patrulater convex, arătaţi că există un unic punct $M \in (BD)$ astfel încât triunghiurile ABM şi CDM să fie echivalente.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

VII.142. Determinaţi valoarea minimă a ariei unui paralelogram circumscris unui cerc de rază r.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VII.143. În interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 60°$ se consideră un punct M astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Un cerc ce trece prin A şi M taie (AB) în Q şi (AC) în R, iar cercul circumscris triunghiului MQB taie (BC) în P. Demonstraţi că triunghiul PQR este dreptunghic.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Clasa a VIII-a

VIII.137. Fie $VABCD$ piramidă patrulateră regulată, M şi N mijloacele muchiilor VA respectiv VD, iar P punctul în care înălţimea VO a piramidei înţeapă planul (MBC). Arătaţi că $VO = 3 \cdot OP$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VIII.138. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $25 \cdot \{x\}^2 - 10x + 1 = 0$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

VIII.139. Numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ au proprietatea că $N = 6^{a_1} + 6^{a_2} + \ldots + 6^{a_{100}}$ este pătrat perfect. Arătaţi că numărul $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ se divide cu 5.

Andrei Eckstein, Timişoara

VIII.140. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\backslash\{n\}$ astfel încât $n^3 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq n[1 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)]$. Demonstraţi că $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

VIII.141. Dacă $a, b, c, x, y, z > 0$ şi $ax + by + cz = 1$, demonstraţi că $\frac{a}{yz} + \frac{b}{xz} + \frac{c}{xy} \geq 27abc$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VIII.142. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $E(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$, $F(x, y) = \sqrt{c^2x^2 + d^2y^2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $|ad| = |bc|$, demonstraţi că

$$\sqrt{E(x,z) \cdot F(x,z)} \leq \sqrt{E(x,y) \cdot F(x,y)} + \sqrt{E(y,z) \cdot F(y,z)}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

VIII.143. Dacă $\frac{a^{2011}}{a^2 + b^2} = \frac{b^{2011}}{b^2 + c^2} = \frac{c^{2011}}{c^2 + a^2}$, demonstraţi că numerele reale pozitive a, b şi c sunt egale.

Cristina Ene, elevă, Craiova

Clasa a IX-a

IX.121. Arătaţi că $\left(\frac{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}{1 + \sin^4 y + \cos^4 y}\right)^2 = \frac{1 + \sin^8 x + \cos^8 x}{1 + \sin^8 y + \cos^8 y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Mihály Bencze, Braşov

IX.122. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $b \geq c > 0$ şi $\frac{a}{b} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Dacă numerele a, b, c pot fi laturile unui triunghi, demonstraţi că şi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ pot fi laturi ale unui triunghi.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.123. Considerăm patrulaterul $ABCD$ şi fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DA, iar T un punct interior patrulaterului. Notăm cu G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale patrulaterelor $TNCP, TPDQ$, $TQAM$, $TMBN$. Arătaţi că $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{DG_4} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\{T\} = MP \cap NQ$.

Florin Stănescu, Găeşti

IX.124. Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, arătaţi că $BC^2 \cdot S_{ACD} + CD^2 \cdot S_{ABC} = AC^2 \cdot S_{BCD}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

IX.125. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y > 1$, arătaţi că $xy + 4 > x + 3y$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Clasa a X-a

X.121. Dacă $a \in \mathbb{R}_+^*$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(2a)^{x^2} \cdot a^x = 2$.

Luminiţa Mihalache, Craiova

X.122. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\dfrac{h_a}{ac} + \dfrac{h_b}{ab} + \dfrac{h_c}{bc} = \dfrac{h_a}{bc} + \dfrac{h_b}{ac} + \dfrac{h_c}{ab}$ (notaţiile sunt cele uzuale).

Petru Asaftei, Iaşi

X.123. Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ şi $x \in (-1, 1)$, demonstraţi inegalitatea $n(\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x}) \leq 2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + n - 2)$.

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

X.124. Aflaţi numerele complexe nenule x, y, z cu proprietatea că

$$x(x+y)(x+z) = y(y+x)(y+z) = z(z+x)(z+y) = -1.$$

Vasile Chiriac, Bacău

X.125. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât numărul $\sqrt{x^2 + 2y + 1} + \sqrt[3]{y^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ este raţional, arătaţi că $x = y$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.121. Dat triunghiul ABC, arătaţi că $\begin{vmatrix} 1 & \sin\dfrac{A}{2} & \sin\dfrac{C}{2} \\ \sin\dfrac{A}{2} & 1 & \sin\dfrac{B}{2} \\ \sin\dfrac{C}{2} & \sin\dfrac{B}{2} & 1 \end{vmatrix} \leq \dfrac{1}{2}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XI.122. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu $A^2 + B^2 = 2I_n$; arătaţi că $\det(AB + BA) \geq 0$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.123. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = 10$, $\det B = 12$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 7$. Determinaţi numerele naturale n pentru care $\operatorname{tr} A^n = \operatorname{tr} B^n$.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

XI.124. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2^{2^0} + \sqrt{2^{2^1} + \sqrt{2^{2^2} + \ldots + \sqrt{2^{2^n} + 1}}}}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.125. Demonstraţi că ecuaţia $25^x + 4^x = 10^x + 9^x$ are cel puţin o soluţie reală negativă.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Clasa a XII-a

XII.121. Fie $a \in \mathbb{N}^*$ şi $G = (a, +\infty)$ pe care definim operaţia $x * y = (x-a)(y-a)+a$, $\forall x, y \in G$. Dacă H este subgrup al lui G astfel încât $\mathbb{N} \cap G \subset H$, arătaţi că $\mathbb{Q} \cap G \subset H$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.122. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f = X^n - 2nX^{n-1} + (2n^2-4)X^{n-2} + a_3X^{n-3} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[X]$. Demonstraţi că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă $n = 2$.

Florin Stănescu, Găeşti

XII.123. Calculaţi $I = \displaystyle\int_0^{\arccos \frac{\sqrt{65}}{9}} \operatorname{tg} x \sqrt{\sin x}\, dx$.

Vasile Chiriac, Bacău

XII.124. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $(f \circ f)(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leq 1$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XII.125. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu f' integrabilă. Dacă $f(0) = 0$, arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq \int_0^1 f^2(t) dt$.

Ciprian Baghiu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G206. Câte submulţimi ale mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ au 50 de elemente şi nu conţin nicio pereche de numere consecutive?

Gheorghe Iurea, Iaşi

G207. Arătaţi că numărul $N = 2^{2009} + 3^{2010} + 4^{2011}$ nu este pătrat perfect.

Andrei Eckstein, Timişoara

G208. Demonstraţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = z(x+y+1)$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G209. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $4abc = (a+2)(b+1)(c+1)$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G210. Demonstraţi că fracţia $\dfrac{a^{3n+2} - a^{3n+1} + (-1)^n}{a^{3n+8} - a^{3n+7} + (-1)^n}$ este reductibilă pentru orice $a, n \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

Dan Popescu, Suceava