Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.134. De la apartamentul meu cobor 7 etaje, apoi urc 4 etaje şi observ că sunt la etajul 9. La ce etaj locuiesc?
(*Clasa I*) **Dragoş Iacob, elev, Iaşi**

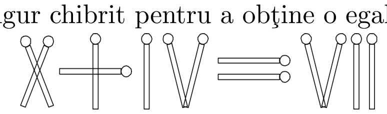
P.135. În trei vase sunt 36 nuci. Dacă din primul vas se iau 3 nuci şi din al treilea o nucă şi se pun în al doilea vas, atunci în fiecare vas va fi acelaşi număr de nuci. Câte nuci au fost la început în fiecare vas?
(*Clasa I*) **Înv. Rica Bucătariu, Iaşi**

P.136. Aflaţi vârsta tatălui meu ştiind că este un număr cuprins între 35 şi 41, dublul lui între 73 şi 77, iar triplul lui este cuprins între 112 şi 118.
(*Clasa a II-a*) **Iurie Juc, elev, Iaşi**

P.137. Dorin, Oana şi Claudia se pregătesc pentru Concursul "Florica T. Câmpan". Oana a rezolvat 15 probleme. Dorin a rezolvat un număr de probleme în plus faţă de Oana, egal cu numărul de probleme rezolvate în plus de Oana faţă de Claudia. Câte probleme au rezolvat împreună cei trei copii?
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.138. Doi taţi şi trei fii au împuşcat fiecare câte un iepure. Când i-au numărat, au văzut că au doar patru iepuri. De ce?
(*Clasa a III-a*) **Inst. Elena Niţă, Iaşi**

P.139. Mutaţi un singur chibrit pentru a obţine o egalitate:



(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

P.140. Descoperă regula de completare a jetoanelor

10	11	12	13	14	...	98	99
0	1	2				72	81

şi calculează câte numere diferite sunt scrise pe aceste jetoane pe locul de jos.
(*Clasa a III-a*) **Lenuţa Zaharia, elevă, Iaşi**

P.141. Fiul observă că, atunci când îi mai trebuia un an până la jumătatea vârstei din prezent, tatăl avea vârsta de 12 ori mai mare decât a sa, iar când va avea 11 ani, vârsta lui va fi de 4 ori mai mică decât a tatălui. Să se afle vârsta fiului în prezent.
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P.142. Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 336. Din această carte se rup, la întâmplare, 111 foi. Să se arate că:

a) suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10;

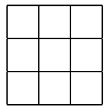
b) produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Maria Frangoi, elevă, Iaşi**

---

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2008.

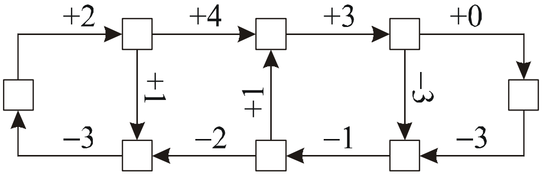
P.143. Aşezaţi numerele 2, 3, 4, ..., 10 în pătratul alăturat astfel încât, pe fiecare linie, suma numerelor din primele două casete să fie egală cu numărul din ultima casetă. În câte moduri pot fi aşezate aceste numere?



(*Clasa a IV-a*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.81. Demonstraţi că putem completa cu numere naturale într-o infinitate de moduri căsuţele libere din figura de mai jos, astfel încât să se poată efectua corect operaţiile indicate:



Amalia Cantemir, elevă, Iaşi

V.82. Într-o fermă sunt găini, oi şi vaci, în total 324 de picioare şi un număr impar de capete:

a) Să se arate că în fermă nu pot fi 101 găini.

b) Să se arate că numărul oilor nu poate fi egal cu numărul vacilor.

Petru Asaftei, Iaşi

V.83. Să se demonstreze că $13 \mid \overline{abc}$ dacă şi numai dacă $13 \mid 3 \cdot \overline{ab} - c$.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş

V.84. Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de 90 de cifre, divizibile cu 90 şi având suma cifrelor 90.

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

V.85. Fie $a, b \in \mathbb{N}$; să se arate că dacă ultima cifră a numărului $a^2 + b^2$ este 9, atunci ultima cifră a lui $(a+b)^2$ este tot 9. Reciproca este adevărată?

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.86. *a*) Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x^2 + y^2 = 625$.

b) Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 = 2007$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^2$.

Valerica Benţa, Iaşi

V.87. Să se arate că $7^{51} > 3^{89}$.

Nela Ciceu, Bacău

Clasa a VI-a

VI.81. Ştiind că $13 \mid 2a + 3b + 4c + 5d$, arătaţi că $13 \mid 43a + 45b + 47c + 49d$ şi $13 \mid 46a + 30b - 64c - 54d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N})$.

Norbert-Traian Ioniţă, elev, Iaşi

VI.82. Fie $A = 3^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Notăm cu a, b, c numărul divizorilor numerelor A, $3A$, respectiv $5A$. Ştiind că a şi b sunt direct proporţionale cu 3 şi 4, iar b şi c sunt invers proporţionale cu 15 şi 16, să se determine A.

Mihai Haivas, Iaşi

VI.83. Dacă p este număr prim, iar $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $p^{4n} - 3$ nu este pătrat perfect.

Mirela Marin, Iaşi

VI.84. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $A_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$. Arătaţi că:

a) $3 \mid A_n$ dacă şi numai dacă $3 \nmid n-1$;

b) $10^n + 1 + \dfrac{9n}{10} < \dfrac{A_{2n}}{A_n} < 10^n + 1 + \dfrac{10n}{11}$, $\forall n \geq 3$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VI.85. Pe latura Ox a unghiului drept xOy considerăm un punct A, iar pe bisectoarea unghiului considerăm un punct B. Perpendiculara în B pe AB taie dreapta Oy în C. Să se arate că $AB = BC$.

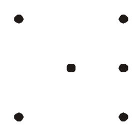
Petru Asaftei, Iaşi

VI.86. *a*) Fie $\triangle ADC$ şi $M \in (AC)$. Să se arate că $P_{ADM} < P_{ADC}$.

b) Fie $\triangle ABC$ şi (AD) bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, $D \in BC$. Dacă $P_{ABD} = P_{ACD}$, să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.87. În figura alăturată sunt desenate 6 puncte, care unite două câte două dau naştere la 9 drepte. Avem voie să ştergem unul dintre puncte şi să-l desenăm oriunde în altă parte.



a) Efectuaţi operaţia descrisă astfel încât, prin unirea câte două a noilor puncte, să se obţină 11 drepte.

b) Care este numărul minim şi cel maxim de drepte care se pot obţine într-o configuraţie permisă?

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.81. Se consideră $\overline{abc}$ şi $\overline{xyzt}$ numere naturale scrise în baza 10. Să se compare numerele naturale $A = \sqrt{6\sqrt{2\sqrt{\overline{abc}}}}$ şi $B = \sqrt{3\sqrt{2\sqrt{\overline{xyzt}}}}$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

VII.82. Fie a, b numere reale strict pozitive. Să se arate că:

a) dacă $a^3 - b^3 = a + b$, atunci $a^2 + b^2 > 1$;

b) dacă $a^3 + b^3 = a - b$, atunci $a^2 + b^2 < 1$.

Ionel Nechifor, Iaşi

VII.83. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d pentru care $ac + bd = 1$, iar $ad + bc = 2$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.84. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de lungime a, iar E, F, G puncte pe laturile $[BC]$, $[CD]$, respectiv $[AB]$ astfel încât $CE = \dfrac{a}{4}$, $CF = \dfrac{a}{3}$, iar $BG = \dfrac{a}{2}$. Să se arate că dreptele AE, BF şi CG sunt concurente.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VII.85. Fie O intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$. Dacă $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{COD}$, să se arate că $\dfrac{CD}{AB} - \dfrac{AB}{CD} = 1$.

Doru Buzac, Iaşi

VII.86. Fie A un punct pe manta unei mese de biliard circulare cu raza de 1 m. O bilă pleacă din A şi ajunge înapoi în A lovind manta de cel puţin trei ori; reflexia bilei se face considerând că aceasta loveşte un perete plan tangent la cerc în punctul de contact. Să se arate că există o infinitate de traiectorii posibile şi să se determine traiectoria de lungime minimă.

Cristian Lazăr, Iaşi

VII.87. O tablă are forma unui dreptunghi 4×5, format din 20 de pătrăţele 1×1. Avem la dispoziţie două jetoane, fiecare putând acoperi câte un pătrăţel. În câte moduri putem aşeza jetoanele pe tablă, astfel încât ele să nu se afle nici pe aceeaşi linie, nici pe aceeaşi coloană? Generalizare.

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.81. Considerăm fixate numerele $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$ şi fie funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$. Dacă $f(1) + f(2) + \cdots + f(m) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + \cdots + f(m+n)$.

Dan Nedeianu, Dr.Tr.Severin

VIII.82. Să se arate că $|-3xy + x + y| \leq 1$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VIII.83. Să se arate că nu există $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $147x^2 = 1 + 4y - 3y^2$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VIII.84. Laturile a, b, c ale unui triunghi verifică egalitatea $2\left(a^8 + b^8 + c^8\right) = \left(a^4 + b^4 + c^4\right)^2$. Să se arate că triunghiul este dreptunghic.

Corina Elena Vişan, Craiova

VIII.85. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}} = \sqrt{a^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{c} = \frac{2}{b}.$$

Liviu Smarandache, Craiova

VIII.86. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are muchia bazei $AB = 4$ cm şi înălţimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm. Fie M mijlocul lui VD, $\{P\} = AD \cap BF$, iar $\{Q\} = PM \cap (VCF)$. Să se arate că:

a) dreptele VP şi DQ sunt concurente; *b*) $DQ \perp (VBF)$.

Gabriel Popa, Iaşi

VIII.87. Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ şi cubul $AMCNA'M'C'N'$, unde M este punct interior triunghiului ABC. Fie E, F, E', F' mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[A'B']$, respectiv $[A'C']$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele EF' şi $E'F$.

b) Aflaţi măsura unghiului format de planele (MCC') şi (BCC').

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.81. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă ecuaţia $x^2 + ax + b + 2 = 0$ are ambele rădăcini întregi, arătaţi că numărul $2a^2 + b^2$ este natural compus.

Dorin Mărghidanu, Corabia

IX.82. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(x^4+y^3+z^2+t\right)=f(x)+f\left(y^2\right)+f\left(z^3\right)+f\left(t^4\right),\quad \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}.$$

Lucian Tuţescu şi **Liviu Smarandache, Craiova**

IX.83. Pentru $a \geq 9$, să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sqrt{3+\sqrt{3a+9}} \geq 1+\sqrt{1+\sqrt{a}}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

IX.84. Fie ABC un triunghi. Determinaţi numerele întregi a, b, c nenule, prime între ele două câte două, astfel încât punctele M, N, P să fie coliniare, unde M, N, P sunt determinate prin condiţiile $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN}=b\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CP}=c\overrightarrow{BC}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

IX.85. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $D=\operatorname{pr}_{BC}A$, $E=\operatorname{pr}_{CA}B$, $F=\operatorname{pr}_{AB}C$. Demonstraţi echivalenţa afirmaţiilor următoare:
(i) $\triangle ABC$ este isoscel;
(ii) $DB+EC+FA=DC+EA+FB$;
(iii) $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{EC}+\dfrac{1}{FA}=\dfrac{1}{DC}+\dfrac{1}{EA}+\dfrac{1}{FB}$.
Examinaţi cazurile în care $\triangle ABC$ este obtuzunghic sau dreptunghic.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.81. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul

$$x-y^{2/3}=z^{1/3};\quad x^{4/3}-y=z^{2/3};\quad z^{5/3}-y^{4/3}=z.$$

Vasile Chiriac, Bacău

X.82. Solve the equation

$$ae^{-x}+b\left|e^{-x}-3\right|=ax^3+b\left|x^3-2\right|+a,\quad a>b>0.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia

X.83. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile isoscele BMA, ANC şi CPB de baze AB, AC şi respectiv BC, astfel încât $m(\widehat{MAB})=15°$, $m(\widehat{NAC})=45°$, iar $m(\widehat{PBC})=30°$. Să se arate că $m(\widehat{MPN})=60°$.

Angela Ţigăeru, Suceava

X.84. Fie ABC un triunghi în care $(\operatorname{tg}B-1)(\operatorname{tg}C-1)=2$. Dacă M şi N sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C, să se arate că segmentele BM, CN şi MN se pot constitui în laturi ale unui triunghi.

Cătălin Calistru, Iaşi

X.85. Se prelungeşte diametrul $[MN]$ al unui cerc $\mathcal{C}$ cu segmentul $[NP]$ congruent cu $[MN]$. Fie d perpendiculara în P pe MN şi $R\in d$ oarecare. Tangentele duse prin R la $\mathcal{C}$ intersectează tangenta în M la $\mathcal{C}$ în S şi T. Să se arate că centrul de greutate al $\triangle RST$ este un punct fix.

Adrian Reisner, Paris

Clasa a XI-a

XI.81. Dacă $m\in\mathbb{Z}$, să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{\{x\}}{\sin\pi x}$.

Dan Popescu, Suceava

XI.82. Considerul şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ şi $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $x \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, arătaţi că şirul $x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent şi calculaţi limita sa.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

XI.83. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care are loc relaţia $f(f(x)) + 9x = f(6x)$, $\forall x \in [0, \infty)$. Arătaţi că $f(x) \geq 3x$, $\forall x \in [0, \infty)$.

Bogdan Poşa şi **Marius Drăgoi, elevi, Motru**

XI.84. Determinaţi numerele $a \in \mathbb{R}$ pentru care există o funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = a^2 f(x) - 2a^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

XI.85. Fie $A = (a_{ij})_{2007\times2007}$ o matrice pătratică în care $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall i, j = \overline{1, 2007}$. Să se arate că determinantul matricei $2008 I_{2007} + A$ este nenul.

Paul Georgescu şi **Gabriel Popa, Iaşi**

Clasa a XII-a

XII.81. Dintre toate parabolele $y = ax^2 + bx + c$, să se determine aceea care trece prin punctele $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, satisface condiţia $y \geq 0$ pentru $0 \leq x \leq 1$ şi realizează minimul ariei determinată de graficul parabolei, Ox şi dreptele $x = 0$, respectiv $x = 1$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.82. Determinaţi primitivele funcţiei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3 \left(5x^4 + 3\right)(\ln x - 1)}{\left(x^4 - 1\right)^3}.$$

Dan Nedeianu, Dr. Tr. Severin

XII.83. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x) = |x| + \int_0^x e^{-t} f(x - t)\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dumitru Mihalache, Bârlad

XII.84. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 X^{2n+1} + a_1 X^{2n} + \cdots + a_{2n} X + a_{2n+1}$ pentru care n este impar, $a_0 a_{2n+1}$ este impar, iar $a_1 a_2$ este par. Să se arate că, dacă f are toate rădăcinile reale, cel puţin una este iraţională.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.85. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că există $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grad n astfel încât toate mulţimile $A_k = \{P(i) \pmod{k} \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, să aibă cardinalul strict mai mic decât k.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G126. Să se determine numerele naturale care au proprietatea că media geometrică a tuturor divizorilor lor este un număr natural.

Petru Minuţ, Iaşi

G127. Dacă a, b, c, x, y, z, t sunt numere reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{ay+bz+ct}+\frac{1}{az+bt+cx}+\frac{1}{at+bx+cy}>\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

G128. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc=1$ şi fie $t\in[1,5]$. Să se arate că

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t}\leq\frac{3}{t+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi **Bogdan Ioniţă, Bucureşti**

G129. Să se determine $y\in\mathbb{R}^*$ pentru care $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{y}\right\}=\{xy\}+\frac{1}{y}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (Cu $\{\cdot\}$ am notat partea fracţionară.)

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

G130. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Dacă $a^{2007}+b^{2007}>\left(2^{2007}+1\right)c^{2007}$, să se arate că unghiul $\widehat{C}$ este ascuţit.

Lucian Tuţescu, Craiova

G131. Fie $n,k\geq 2$ numere naturale şi mulţimea $M=\{-(n-1),\ldots,-2,-1,1,2,\ldots,n\}$. Să se arate că M se poate partiţiona în k submulţimi având fiecare aceeaşi sumă a elementelor dacă şi numai dacă n se divide cu k.

Marian Tetiva, Bârlad

G132. În fiecare câmp unitate al unei livezi $m\times n$ se află câte un măr. Un număr de k arici pornesc, pe rând, din câmpul stânga-sus al livezii şi se mişcă spre câmpul din dreapta-jos. La fiecare mişcare, un arici se poate deplasa cu un câmp, spre dreapta sau în jos, fără a ieşi din livadă. Ariciul poate să culeagă mărul din câmpul pe care îl vizitează, dacă nu a fost cules deja de alt arici. Care este numărul minim k, pentru care k arici pot să culeagă toate merele?

Iurie Boreico, elev, Chişinău

G133. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi D un punct astfel încât $BD=DC$, $m(\widehat{BDC})=30°$, iar BC separă A şi D. Dacă $E\in(BD)$ cu $m(\widehat{BAE})=15°$, să se arate că $CE\perp AC$.

Enache Pătraşcu, Focşani

G134. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ înscris într-un cerc de rază $\sqrt{6}$ cm, având $m(\widehat{A})=60°$ şi $m(\widehat{B})=45°$. Să se arate că aria patrulaterului este cel mult egală cu $3\sqrt{6}$ cm^2.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G135. Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Să se arate că cel puţin două dintre unghiurile diedre formate de faţa (ABC) cu feţele (BCD), (ACD), (ABD) sunt ascuţite.

Dan Brânzei, Iaşi

B. Nivel liceal

L126. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Madiatoarea laturii AB intersectează latura AC în T, iar mediatoarea laturii AC intersectează latura AB în S. Să se arate că paralela prin T la AB, paralela prin S la AC şi simediana din A sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L127. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$un hexagon inscriptibil. Să se arate că

$$r_{A_1A_2A_3} + r_{A_4A_5A_6} + r_{A_1A_3A_6} + r_{A_3A_4A_6} = r_{A_3A_4A_5} + r_{A_1A_2A_6} + r_{A_2A_3A_6} + r_{A_3A_5A_6},$$

unde r_{XYZ} este raza cercului înscris în $\triangle XYZ$.

Cătălin Calistru, Iaşi

L128. Să se arate că între medianele unui triunghi are loc inegalitatea

$$8\left(\prod m_a\right)\left(\sum m_a^2 m_b^2\right) \geq \left[\prod (m_a + m_b)\right]\left[2\sum m_a^2 m_b^2 - \sum m_a^4\right].$$

Dorel Băiţan şi **I.V.Maftei, Bucureşti**

L129. În planul raportat la un reper cartezian xOy considerăm vectorii legaţi în O: $\vec{v}_1\,(a_1, b_1)$, $\vec{v}_2\,(a_2, b_2)$, $\vec{v}_3\,(a_3, b_3)$. Să se arate că există un tetraedru $OABC$ regulat, de muchie 1 şi astfel încât $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ se proiectează pe planul xOy în $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, respectiv $\vec{v}_3$ dacă şi numai dacă se verifică simultan relaţiile:

$$\frac{3}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3 = \frac{3}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - b_1b_2 - b_1b_3 - b_2b_3 = 1;$$

$$\frac{3}{2}\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right) - \left(a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2\right) = 0.$$

Irina Mustaţă, studentă, Bremen

L130. Să se arate că pentru orice $x, y \geq 1$ are loc inegalitatea

$$(xy - x - y)^2 + \left(6\sqrt{3} - 10\right)xy \geq 6\sqrt{3} - 9.$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi **Marian Tetiva, Bârlad**

L131. Să se afle valoarea minimă a numărului real k astfel încât, oricare ar fi a, b, c reale pozitive cu $a + b + c = ab + bc + ca$, să aibă loc inegalitatea

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - k\right) \leq k.$$

Andrei Ciupan, elev, Bucureşti

L132. Fie $a, b, c, x, y, t \in \mathbb{R}$ şi $A = ax+by+cz$, $B = ay+bz+cx$, $C = az+bx+cy$. Dacă $|A - B| \geq 1$, $|B - C| \geq 1$ şi $|C - A| \geq 1$, arătaţi că $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq \dfrac{4}{3}$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L133. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care

$$2f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

L134. Avem un colier cu n mărgele, numerotate consecutiv $1, 2, \ldots, n$, unde $n \geq 3$. În câte moduri putem să le colorăm cu trei culori, astfel încât oricare două mărgele consecutive să aibă culori diferite?

Iurie Boreico, elev, Chişinău

L135. Se consideră un poligon cu $3n$ laturi, $n \geq 2$, înscris într-un cerc de rază 1. Arătaţi că cel mult $3n^2$ dintre segmentele având capetele în vârfurile poligonului au lungimea strict mai mare decât $\sqrt{2}$.

Bianca-Teodora Iordache, elevă, Craiova

Training problems for mathematical contests

Junior highschool level

G126. Determine the natural numbers such that the arithmetic mean of all their divisors is a natural number as well.

Petru Minuţ, Iaşi

G127. If a, b, c, x, y, z, t are positive real numbers, prove the inequality

$$\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{ay+bz+ct}+\frac{1}{az+bt+cx}+\frac{1}{at+bx+cy} > \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

G128. Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$ and let $t \in [1, 5]$. Show that

$$\frac{a}{a^2+t}+\frac{b}{b^2+t}+\frac{c}{c^2+t} \leq \frac{3}{t+1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti and **Bogdan Ioniţă, Bucureşti**

G129. Determine $y \in \mathbb{R}^*$ such that $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{y}\right\} = \{xy\} + \frac{1}{y}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (with $\{\cdot\}$ denoting the fractional part.)

Alexandru Negrescu, highschool student, Botoşani

G130. Let a, b, c be the side lengths of a triangle ABC. If $a^{2007} + b^{2007} > \left(2^{2007} + 1\right) c^{2007}$, show that the angle $\widehat{C}$ is acute.

Lucian Tuţescu, Craiova

G131. Let $n, k \geq 2$ be natural numbers and consider the set $M = \{-(n-1), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, n\}$. Show that M can be partitioned into k subsets with the same sum of the elements in each of them if and only if n is divisible by k.

Marian Tetiva, Bârlad

G132. A rectangular garden has $m \times n$ unit squares. On each of them there is an apple. A number of k hedgehogs start successively from the first left top square, moving to the right bottom square. At each step, any hedgehog may move one square right or below (still remaining in the garden) and picking up the apple on the square, unless the apple was not earlier picked up. Which is the least number k of hedgehogs able to pick up all the apples?

Iurie Boreico, highschool student, Chişinău