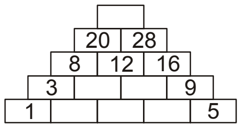
Probleme propuse[1]

Clasele primare



P.114. În piramida alăturată unele numere s-au şters de-a lungul timpului. Putem să le punem la loc?
(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

P.115. Dacă din prima ladă iau 2 mere şi le pun în lada a doua, din a doua ladă iau 3 mere şi le pun în lada a treia, iar din lada a treia iau 4 mere şi le pun în prima ladă, atunci în fiecare ladă voi avea câte 34 mere. Câte mere au fost în fiecare ladă?
(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.116. Luni, mama pune într-un coş câteva mere. Joi, ea găseşte în coş doar 20 de mere. Câte mere a pus mama în coş, ştiind că, în fiecare zi din acea săptămână, Mihai, cel mai mare dintre fraţi, împarte fraţilor mai mici cu un măr mai mult ca în ziua precedentă şi că joi el împarte 5 mere? Câte mere mai rămân în coş sâmbătă, după împărţirea merelor?
(*Clasa II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.117. În exerciţiul $1\square 1\square 1\square 1\square 1\square 1\square 1\square 1 =$ fiecare căsuţă poate fi înlocuită cu "$+$" sau "$-$". Cât poate fi rezultatul acestui exerciţiu?
(*Clasa II-a*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

P.118. Calculaţi $a+b+c+d$, ştiind că $a\times b=5$ şi $c\times d=15$. Găseşte toate posibilităţile.
(*Clasa III-a*) **Înv. Rica Bucătariu, Iaşi**

P.119. Produsul a 10 numere naturale este 40. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a sumei celor 10 numere.
(*Clasa III-a*) **Înv. Mirela Buburuzanu, Tomeşti (Iaşi)**

P.120. Se consideră numerele $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 49$. Care este cel mai mare număr de numere pe care putem să alegem dintre acestea astfel încât suma oricăror trei dintre ele să se împartă exact la 9.
(*Clasa III-a*) **Înv. Felicia-Petronela Leanu, Cepleniţa (Iaşi)**

P.121. Ceasul lui Andrei o ia înainte cu 20 secunde pe oră. El a potrivit ceasul luni la ora 8 şi a citit din nou ceasul lunea următoare la aceeaşi oră. Ştiind că în această durată ceasul nu a funcţionat permanent, iar la ultima citire arăta ora 8 h 50 min, să se afle cât nu a funcţionat ceasul.
(*Clasa IV-a*) **Paula Borşanu, elevă, Iaşi**

P.122. La Concursul de matematică "F.T.Câmpan", etapa judeţeană, au participat 100 elevi de clasa a IV-a, care au avut de rezolvat 3 probleme. Dacă 70 elevi au rezolvat bine prima problemă, 69 a doua problemă şi 64 a treia problemă, să se arate că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.
(*Clasa IV-a*) **Anca Cornea, elevă, Iaşi**

P.123. Într-o cutie sunt 34 bile, din care unele cântăresc cu 1 g mai mult. Dacă fiecare bilă cântăreşte un număr natural de grame, iar masa tuturor bilelor este 113 g,

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2007.

să se afle câte bile sunt mai grele.
(*Clasa IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.71. Comparaţi numerele 3^{300003} şi 2^{450004}.

Lucian Tuţescu, Craiova

V.72. Fie mulţimile A, B astfel încât $A \subset B$, $|\mathcal{P}(A)| \geq 60$, $|\mathcal{P}(B)| \leq 260$. Să se determine $|A|$ şi $|B|$. (Prin $|X|$ am notat cardinalul mulţimii X.)

Petru Asaftei, Iaşi

V.73. Să se scrie numărul 2006^{2005} ca o sumă de şase pătrate perfecte nenule.

Ionel Nechifor, Iaşi

V.74. Se consideră şirul de numere naturale 1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, ... Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Marius Damian, Brăila

V.75. Fie $x, k \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, $k < x$. Să se arate că

$$(x-1)\,\overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Doru Buzac, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.71. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $100x - 2006y^2 + 15z = 0$. Să se arate că $y(x+z) \,\vdots\, 85$.

Dan Nedeianu, Dr.-Tr. Severin

VI.72. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr prim. Să se determine $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{p}{x^2} + \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VI.73. Fie $A_n = 14 + 1414 + 141414 + \cdots + \underbrace{\overline{1414\ldots 14}}_{2n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine mulţimea $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \dfrac{A_n - 7n^2 - 7n}{9} \in \mathbb{N} \right\}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

VI.74. Considerăm două axe perpendiculare Ox şi Oy, precum şi cele două bisectoare ale unghiurilor drepte care se formează. Fie A oarecare, iar B, C simetricele sale faţă de prima bisectoare, respectiv faţă de Ox. Rotim segmentul $[OC]$ în jurul lui O cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic şi notăm cu D extremitatea segmentului rotit. Să se arate că:
a) B, O, D sunt coliniare şi O este mijlocul lui $[BD]$;
b) D este simetricul lui A faţă de a doua bisectoare.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VI.75. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O intersecţia diagonalelor, M mijlocul lui $[AB]$, iar N mijlocul lui $[OD]$. Să se arate că $2P_{BCNM} < P_{BDC} + P_{ABC}$.

Bogdan Posa şi Marius Drăgoi, elevi, Motru

Clasa a VII-a

VII.71. Fie $\triangle ABC$, $AB < AC$ şi $D \in (AC)$. Fie AE bisectoarea lui $\widehat{BAC}$, $E \in (BD)$, F mijlocul lui $[AD]$, $\{O\} = AE \cap BF$, $\{G\} = DO \cap AB$. Să se arate că $GD \parallel BC \Leftrightarrow AB = CD$.

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

VII.72. Fie $ABCD$ paralelogram, $E \in (CD)$, $\{M\} = AE \cap BD$, $\{N\} = BE \cap AC$, $\{O\} = AC \cap BD$. Să se arate că $A_{MEN} = 2A_{MON}$.

Mirela Marin, Iaşi

VII.73. Fie $a < b \leq c$ razele a trei cercuri tangente între ele şi tangente la o aceeaşi dreaptă în trei puncte distincte. Să se arate că $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

Dan Radu, Bucureşti

VII.74. Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere în baza 10 nu apar alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100 000 conţine M?

Gabriel Popa, Iaşi

VII.75. Fie $m \geq 3$ un număr natural impar şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \cdots = |a_{m-1} - a_m| = |a_m - a_1|.$$

Demonstraţi că $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ se divide cu m.

Maria Miheţ, Timişoara

Clasa a VIII-a

VIII.71. Pe planul $\triangle ABC$ se ridică perpendiculara AM. Fie P proiecţia lui A pe planul (MBC), iar E, F proiecţiile punctului P pe MB, respectiv MC. Să se arate că $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş

VIII.72. Fie a, b, c numere reale distincte. Să se afle partea întreagă a numărului $A = \dfrac{a^2 + bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2 + ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2 + ab}{(c-a)(c-b)}$.

Mihail Bencze, Braşov

VIII.73. Să se demonstreze că $a \in \mathbb{N}$ este ipotenuză a unui triunghi dreptunghic cu laturile exprimate prin numere naturale dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 - n$ şi $a^2 + n$ sunt pătrate perfecte.

Cătălin Calistru, Iaşi

VIII.74. Fie $\alpha \in (0, 1]$; să se arate că $\left(\alpha + \left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right|\right) : \left(\alpha - \left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right|\right) \geq 1$, în fiecare din situaţiile:

a) $x, y \in [0, \alpha)$; *b)* $-\alpha < x \leq 0 \leq y < \dfrac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

VIII.75. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracţia $\dfrac{2^{n+1} + 3}{3 \cdot 2^n + 1}$ este reductibilă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.71. Fie $a < b$ numere reale; să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $2z^2 + b =$

$= 2yz + a$, iar $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = y$.

Andrei Nedelcu şi Lucian Lăduncă, Iaşi

IX.72. Fie $x, y, z \in [1, +\infty)$ aşa încât $\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{y}{[y]} = \dfrac{z}{[z]}$. Să se arate că

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} + \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce egalitate se obţine pentru $x, y, z \in (-\infty, -1]$?

Dan Plăeşu, Iaşi

IX.73. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ cu $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, să se arate că are loc inegalitatea

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}.$$

Marius Tiba, elev, Iaşi

IX.74. Fie a, b, c lungimile laturilor $\triangle ABC$ şi $m, n \in (0, +\infty)$. Considerăm punctele A', B', C' astfel încât $C \in (AA')$, $A \in (BB')$, $B \in (CC')$ şi $CA' = ma + n$, $AB' = mb + n$, $BC' = mc + n$. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Dumitru Mihalache, Bârlad

IX.75. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil, $\{O\} = AC \cap BD$, $m(\widehat{AOD}) = 60°$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$. Notăm $k = \dfrac{MA}{MB}$, $r = \dfrac{NC}{ND}$, $p = \dfrac{OA}{OB}$. Dacă $p \in \left\{2k, \dfrac{2}{r}, \dfrac{1}{2r}\right\}$, să se arate că $m(\widehat{MON}) \neq 90°$.

Mihai Haivas, Iaşi

Clasa a X-a

X.71. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} + 2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 3.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

X.72. Să se rezolve sistemul

$$x^2 \log_2 15 + y^2 \log_3 10 + z^2 \log_5 6 = 2\left(xy + yz + zx\right),$$
$$x + y + z = 5.$$

Marius Damian, Brăila

X.73. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3 \mid x + y$, are loc egalitatea $f\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{3}$.

Eugenia Roşu, elevă, Iaşi

X.74. Fie d_1, d_2 două drepte perpendiculare şi l_1, l_2 dreptele suport ale bisectoarelor celor două perechi de unghiuri opuse formate de ele. Determinaţi $\triangle ABC$ cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in l_1$ şi $O, H \in l_2$ (O, H cu semnificaţiile uzuale).

Temistocle Bîrsan, Iaşi

X.75. *a*) Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe diferite astfel încât $\mathrm{Re}\,(\alpha \bar{z}_1) = \mathrm{Re}\,(\alpha \bar{z}_2) = \mathrm{Re}\,(\alpha \bar{z}_3)$, atunci punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare. Notăm cu d dreapta pe care sunt situate aceste puncte.

b) Dacă z_1', z_2', z_3' sunt trei numere complexe diferite cu proprietatea că $\operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_1') = \operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_2') = \operatorname{Im}(\alpha\bar{z}_3')$, atunci punctele cu afixele z_1, z_2, z_3 sunt coliniare. Fie d' dreapta ce le conţine.

c) Să se arate că dreptele d şi d' sunt perpendiculare.

Constantin Cocea, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.71. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{\ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$.

Dan Popescu, Suceava

XI.72. Este posibil ca o funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică $1+f(x)+f(x)\,f(1+x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să fie continuă pe $\mathbb{R}$?

Dorin Mărgidanu, Corabia

XI.73. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie nenulă de clasă C^{k+1} pe $[0,1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $f(0) = f(1) = 0$. Dacă pentru orice $1 \leq j \leq k$ există $a_j \in \{0,1\}$ astfel încât $f^{(j)}(a_j) = 0$, atunci există $x_1, x_2 \in (0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_1) \cdot f^{(k+1)}(x_2) < 0$.

Gheorghe Moroşanu şi Paul Georgescu, Iaşi

XI.74. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in 2\mathbb{N}^*$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(1) $b^2 - 4ac \leq 0$, (2) $\det\left(aA^2 + bA + cI_n\right) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Marian Ursărescu, Roman

XI.75. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $AB - BA$ comută cu A şi cu B, atunci $AB = BA$.

Dorel Miheţ, Timişoara

Clasa a XII-a

XII.71. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \sin nx\, dx = 0$.

Dan Radu, Bucureşti

XII.72. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $[0,1]$, cu proprietatea că există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} = 0,\ \forall p \in \mathbb{N}^*;$$

b)
$$\lim_{p\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} = \int_0^1 x^n f^{(n)}(x)\, dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

XII.73. Să se arate că
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n} dx = n \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = n\frac{\pi}{8} \ln 2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze apoi $\int\limits_{0}^{\pi/4} \ln \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x} dx$.

Gabriel Necula, Plopeni

XII.74. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$, cu $x, y \in G$. Dacă f, g sunt două endomorfisme ale lui G, atunci ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie unică dacă şi numai dacă funcţia $h : G \to G$, $h(x) = f(x^n)\, g(x^n)$este injectivă.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

XII.75. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r şi $S = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid ABA = O_n\}$. Arătaţi că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi că $\dim S = n^2 - r^2$.

Adrian Reisner, Paris

Premiu pe anul 2006 acordat de ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE"

Se acordă un premiu în bani în valoare de **100** lei elevului

ZAHARIUC Adrian – *Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău*

pentru nota *O problemă despre suma cifrelor unui număr natural în baze de numeraţie oarecare* apărută în acest număr la pagina 113.

Acest premiu este acordat de **Asociaţia "Recreaţii Matematice"** ca urmare a contractului de sponsorizare cu **Fundaţia Culturală "Poiana"** (director d-l **Dan Tiba**).

Premii pe anul 2006 acordate unor elevi din Republica Moldova participanţi la faza finală a ONM, Iaşi, 2006

Se acordă câte un premiu în valoare de **100** lei elevilor

GUZUN Ion

BOREICO Iurie

din lotul Republicii Moldova, care au obţinut cele mai bune rezultate.

Premiile sunt acordate de **Asociaţia "Recreaţii Matematice"**, iar suma de bani provine din contractul de sponsorizare cu **Fundaţia Culturală "Poiana"** (director d-l **Dan Tiba**).

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G106. Fie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$, considerăm propoziţiile: $x > 1; x > 2; \ldots; x > m$. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care k din cele m propoziţii sunt adevărate, iar celelalte $m - k$ sunt false.

Maria Miheţ, Timişoara

G107. Mulţimea $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ are proprietatea că, oricare ar fi patru elemente ale sale, putem alege două cu suma $2^{2006} + 1$. Aflaţi valoarea maximă a lui n.

Dan Nedeianu, Dr. Tr. Severin

G108. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea numerelor întregi de modul cel mult egal cu n poate fi partiţionată în m submulţimi cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă $n + 1 \geq m$.

Marian Tetiva, Bârlad

G109. La un concurs se dau şase probleme evaluate cu 1, 2, 3, 4, 5, repectiv 6 puncte. Dacă un elev nu rezolvă o problemă, primeşte 1 punct; dacă o rezolvă, primeşte punctajul corespunzător. Fiecare elev obţine măcar 11 puncte. Să se arate că o problemă a fost rezolvată de cel puţin o treime dintre elevi.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

G110. Fie mulţimile $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = (0, 1/10)$. Arătaţi că $A \cap B$ este infinită.

Petru Asaftei, Iaşi

G111. Fie $0 < a < b$ numere reale date şi $x, y \in [a, b]$. Dacă $s = x + y$, $p = xy$, să se afle maximul expresiei $E = p + \dfrac{ab\left(s^2 + ab\right)}{p}$.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

G112. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci

$$\sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(c+a)^2 - b^2} < 2\,(a + b + c)\,.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia şi Muntenegru

G113. Fie segmentul $[AB]$ de mijloc O şi semicercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de diametru $[AB]$, respectiv $[AO]$ situate în acelaşi semiplan faţă de AB. Perpendiculara în $C \in (AO)$ pe AB intersectează $\mathcal{C}_1$ în E şi $\mathcal{C}_2$ în D. Dacă $AD \cap \mathcal{C}_1 \setminus \{F\}$, să se arate că AE este tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

G114. Fie $ABCD$ un paralelogram care nu este romb cu $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$. Dacă $M, N \in (AC)$, $P \in (BC)$ şi $Q \in (CD)$ sunt astfel încât $[BM$, $[DN$, $[AP$ şi $[AQ$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ şi respectiv $\widehat{DAC}$, atunci MP este perpendiculară pe NQ.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G115. Fie pătratul $MNPQ$ înscris în pătratul $ABCD$, $M \in (AB)$, $N \in (AD)$, $P \in (CD)$, $Q \in (BC)$ şi fie $\{E\} = PN \cap AB$, $\{F\} = PQ \cap AB$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile pătratului $ABCD$, pătratului $MNPQ$, respectiv $\triangle PEF$. Să se arate că:

a) $S_1 - S_2 = 4\sqrt{S_{AEN} \cdot S_{BFQ}}$; b) $S_3 \geq S_1$; c) $\frac{1}{S_3} = \frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_3}$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

B. Nivel liceal

L106. Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Dreptele AI, BI şi CI intersectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiului BCI, CAI şi ABI în A', B', respectiv C'. Dacă notăm cu $|XYZ|$ perimetrul $\triangle XYZ$, să se demonstreze că

$$\frac{BC}{|BCA'|} + \frac{CA}{|CAB'|} + \frac{AB}{|ABC'|} = 1.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L107. Fie M_1N două puncte situate în interiorul $\triangle ABC$, având distanţele până la laturile AB, BC, CA egale cu 3, 2, 7, respectiv $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{5}{2}$. Dacă raza cercului circumscris $\triangle ABC$ este $R = 8$, să se calculeze MN.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

L108. Să se arate că în orice $\triangle ABC$ are loc inegalitatea

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq 4\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi - 3A}{12}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L109. Se dau numerele reale pozitive subunitare $a_1, a_2, \ldots, a_{2n^2-n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Să se demonstreze inegalitatea (sumarea se face prin permutări circulare)"

$$\sum \frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n-1} + a_3^{2n-1} + \ldots + a_{2n^2-n}^{2n-1} + 2n + 1} < \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Ioan Şerdean, Orăştie

L110. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $n, k \in \mathbb{N}$. Demonstraţi identitatea

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k + \frac{4n(a-b)^2}{k(a^{2-k} + b^{2-k} + c^{2-k})}.$$

(În legătură cu o problemă propusă la OBM 2005).

Titu Zvonaru, Comăneşti and Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L111. Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L112. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $a(n)$ numărul modurilor în care n se poate scrie ca sumă a unui număr par de puteri ale lui 2 şi cu $b(n)$ numărul modurilor în care n se poate scrie ca sumă a unui număr impar de puteri ale lui 2. Să se arate că $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L113. Determinaţi numerele reale a, b pentru care mulţimea $A = \{a^n + b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

Gheorghe Iurea, Iaşi

L114. Considerăm o parabolă şi două drepte secante parabolei, paralele între ele, dar neparalele cu axa de simetrie a parabolei. Folosind doar rigla negradată, să se construiască tangenta la parabolă care este paralelă cu dreptele date.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L115. Determinaţi $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} P \geq 2$, astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = p(\{x\}) + \{p(x)\}$ să fie periodică (unde p este funcţia polinomială ataşată lui P, iar $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară).

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iaşi

Training problems for mathematical contests

Junior highschool level

G106. Let $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ and $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. For any $x \in \mathbb{N}$, consider the assertions: $x > 1$; $x > 2$; $\ldots$; $x > m$. Find $x \in \mathbb{N}$ such that k out of the m assertions are true while the other $m - k$ are false.

Maria Miheţ, Timişoara

G107. The set $A \subset \mathbb{N}$ of cardinal number $n \in \mathbb{N}$ has the property that, from any four of its elements, we can choose two elements whose sum is $2^{2006} + 1$. Find the maximum value of n.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

G108. Let $m, n \in \mathbb{N}^*$. Show that the set of integer numbers of absolute value at most equal to n can be partitioned into m subsets with the same sum of their elements if and only if $n + 1 \geq m$.

Marian Tetiva, Bârlad

G109. Six problems are proposed for a school contest and they are respectively evaluated with 1, 2, 3, 4, 5, 6 points. If a schoolchild does not solve a problem he receives 1 point for it; if he (she) solves it he gets the corresponding points. Every schoolchild receives at least 11 points. Show that a problem was solved by at least one third of the participating schoolchildren.

Gabriel Dospinescu, Paris

G110. Let us consider the sets $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ and $B = (0, 1/10)$. Show that $A \cap B$ is infinite.

Petru Asaftei, Iaşi

G111. Let $0 < a < b$ be two given real numbers and $x, y \in [a, b]$. If $s = x + y$, $p = x\,y$, determine the maximum value of the expression $E = p + \dfrac{ab(s^2 + a\,b)}{p}$.

Vlad Emanuel, highschool student, Sibiu

G112. Let a, b, c be the sides of the triangle ABC. Prove that

$$\sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(c+a)^2 - b^2} < 2(a + b + c).$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

G113. Let $[AB]$ be a line segment of midpoint O and let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be the halfcircles of diameters $[AB]$, respectively $[AO]$ situated in the same halfplane with