Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.94. Aflaţi numerele de două cifre cu proprietatea că diferenţa dintre număr şi răsturnatul lui este egală cu cel mai mare număr scris cu o singură cifră.
(*Clasa I*) **Mara Neicu, elevă, Hârlău**

P.95. La ora de educaţie fizică, fetele unei clase sunt aliniate de la cea mai înaltă la cea mai scundă, iar băieţii după ele, în aceeaşi ordine. Ana este cea mai înaltă. Ene este cel mai înalt, iar Sorin cel mai scund. Între Ana şi al doilea băiat sunt 15 copii, iar între Ene şi Sorin sunt 10 băieţi. Câţi elevi sunt aliniaţi la educaţia fizică?
(*Clasa I*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

P.96. Descoperă regula şi completează căsuţele libere în cazurile:

a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 8 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 10 \\ \hline 4 & 14 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 7 \\ \hline 2 & \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 6 & 13 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline\end{array}$;

b) $\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 8 & 7 \\ \hline 1 & 6 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline 0 & \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 3 \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$.

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.97. În câte moduri putem forma un şir indian compus din 4 băieţi şi 3 fete astfel încât două fete să nu stea una lângă alta, iar şirul să nu înceapă cu o fată?
(*Clasa a II-a*) **Andrei Burdun, elev, Iaşi**

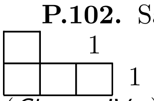
P.98. La Crăciun, copii au împodobit bradul cu 35 globuri albe, galbene şi roşii. Andrei a observat că, dacă împarte numărul globurilor albe la cele galbene obţine câtul 3 şi restul 2, iar dacă împarte numărul globurilor roşii la cele galbene obţine câtul 2 şi restul 3. Câte globuri de fiecare fel au împodobit bradul?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucătaru, Iaşi**

P.99. La concursul de alergare organizat de clasa a II-a, cei mai buni băieţi sunt Radu, Cezar, Tudor, Dan şi Mihai. Care a fost clasamentul final, dacă: 1) Radu nu a luat locul întâi, 2) Cezar s-a clasat în urma lui Mihai, 3) Radu s-a clasat înaintea lui Mihai, 4) Tudor nu s-a clasat al doilea, 5) Dan este al treilea după Tudor.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

P.100. Trei numere naturale au suma 60. Să se afle numerele ştiind că împărţindu-l pe primul la al doilea obţinem câtul 4 şi restul 3, iar al treilea este cu 1 mai mare decât dublul celui de-al doilea.
(*Clasa a III-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava**

P.101. Există numere naturale care împărţite la 12 să dea câtul 7, iar împărţite la 15 să dea restul 2?
(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

P.102. Să se arate că pătratul de latură 36 poate fi acoperit cu piese de forma



.

(*Clasa a IV-a*) **Andrei Burdun, elev, Iaşi**

---

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2006.

P.103. Un dreptunghi are perimetrul de 624 cm, iar lungimea este dublul lăţimii. Poate fi împărţit dreptunghiul într-o reţea de pătrate egale astfel încât suma perimetrelor lor să fie 6656 cm?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.61. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{N}$ în fiecare din cazurile:
a) $x \cdot y = \dfrac{25}{2z+1}$; *b*) $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2z+1}$;

Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava

V.62. Să se scrie numărul 12321 ca diferenţă a două pătrate perfecte.

Andrei-Sorin Cozma, elev, Iaşi

V.63. Să se scrie în ordine crescătoare numerele 3^{3^3}; 3^{33}; 333; 33^3; $\left(3^3\right)^3$.

Ion Vişan, Craiova

V.64. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, încât $5^x + 5^y = z!$, unde $z! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot z$.

Doru Turbatu, Iaşi

V.65. Vom numi *"număr p"* un număr natural care are exact 4 divizori.
a) Daţi exemplu de trei *numere p* consecutive.
b) Să se arate că nu există trei *numere p* consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Clasa a VI-a

VI.61 Dacă $a = x^9y^3z^4t^{10}$, $b = xy^5z^6t^8$, $c = x^5y^7z^{10}t^{12}$ şi $|a| + a = 0$, să se arate că $|b| + b = |c| + c = 0$.

Cristian - Cătălin Budeanu, Iaşi

VI.62. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât
$$\frac{a_1a_2a_3}{a_4} + \frac{a_2a_3a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{n-1}a_na_1}{a_2} + \frac{a_na_1a_2}{a_3} = 0.$$
Să se arate că n se divide cu 4.

Ioana Olan, elevă, Iaşi

VI.63. Se poate completa un pătrat 10×10 cu numerele de la 1 la 100, aşa încât pentru fiecare coloană să se poată forma (cu numerele din acea coloană) trei grupe, astfel ca sumele numerelor din fiecare grupă să fie egale?

Bogdan Andrei Ciacoi, elev, Gherla

VI.64. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, arătaţi că interiorul oricărui patrulater convex se poate descompune în reuniune de n triunghiuri dreptunghice cu interioarele disjuncte.

Gabriel Popa, Iaşi

VI.65. Fie $\triangle ABC, DE \parallel BC$, cu $E \in (AC)$ şi $D \in (AB)$, iar $F \in (BD)$ şi $\{G\} = FE \cap DC$. Demonstraţi că, dacă două dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a treia:
(*i*) $BD = 2BF$; (*ii*) $AC = 2CE$; (*iii*) $EF = 2FG$.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.61. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $p, k \in \mathbb{N}$, $p < k$. Să se arate că

$$\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p+1} + \cdots + \frac{1}{n+k} > \frac{2(k-p+1)}{2n+k+p}.$$

(În legătură cu **V.31** din RecMat - 2/2002).

Gigel Buth, Satu Mare

VII.62. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{10} - a^6 + a^2 = 4$. Să se arate că $7 < a^{12} < 16$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VII.63. Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ cu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ şi bisectoarele $[BE]$, $[B'E']$ congruente. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Petru Asaftei, Iaşi

VII.64. În triunghiul echilateral ABC considerăm cevienele AM, BN şi CP concurente într-un punct O, interior triunghiului. Arătaţi că, dacă $\triangle MNP$ este echilateral, atunci O este centrul $\triangle ABC$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

VII.65. Fie $ABCD$ paralelogram. O dreaptă variabilă ce trece prin A taie dreptele BC şi CD în F, respectiv G şi taie paralela prin C la BD în E. Să se arate că $AE^2 \leq AF \cdot AG$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.61. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $x! = y^{2z} + 1$.

Denisa Florică şi Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.62. If $a, b, c > 0$ and $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$, prove that

$$2(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) + 3(a+b+c).$$

Babis Stergiou, Chalkida, Greece

VIII.63. Let a, b be distinct nonzero real numbers. Find all solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ of the equation $(x-1)^2 + y^2 + \frac{4ab}{a^2+b^2}(x-1)y = 0$.

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain

VIII.64. Să se afle numărul de pătrate perfecte p astfel încât $2^n \leq p < 2^{n+1}$.

Marian Panţiruc, Iaşi

VIII.65. Fie M un punct interior tetraedrului $ABCD$, iar d_A, d_B, d_C, d_D distanţele de la M la planele (BCD), (ACD), (ABD), respectiv (ABC). Să se arate că $\frac{MA}{d_A} + \frac{MB}{d_B} + \frac{MC}{d_C} + \frac{MD}{d_D} \geq 12$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Clasa a IX-a

IX.61. The radii of the three escribed circles of a triangle ABC are $r_a = 4$, $r_b = 6$, $r_c = 12$. Find the lenghts of the sides of the triangle.

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain

IX.62. Rezolvaţi sistemul în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$:

$$2(n-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k = \left(1+x_1^2\right) \cdot \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = \left(1+x_n^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2.$$

Silviu Boga, Suceava

IX.63. Determinaţi $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $x^3 + y^3 \leq x + y \leq x^5 + y^5$.

Romeo Ilie, Braşov

IX.64. Fie $ABCD$ un patrulater, iar H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Demonstraţi că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_C H_A}$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_D H_B}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

IX.65. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \sin a \geq \cos x \cdot \cos b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\dfrac{a-b}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Clasa a X-a

X.61. If $x \geq 0$, prove that $\log_3 (1 + 3^x) > \log_4 \left(4^x + \left(\sqrt[3]{2}\right)^x\right)$.

Oleg Faynshteyn, Leipzig, Germany

X.62. Se dă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ cu proprietatea că $z_{n+2} = z_n + i z_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, şi se notează cu V mulţimea termenilor săi. Dacă $U_3 \subset V$, să se arate că $V = U_{12}$. (Am notat $U_k = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\right\}$.)

Monica Nedelcu, Iaşi

X.63. Un număr de n jucători aruncă succesiv o monedă având feţele s şi b; jocul este câştigat de acela care obţine primul faţa s. Să se afle probabilitatea ca jucătorul de pe locul k $(1 \leq k \leq n)$ să câştige jocul în primele $np + k$ aruncări ale monedei, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este dat.

Petru Asaftei, Iaşi

X.64. Fie $f : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{2005 \cdot |x|}{2004 \cdot \left|\sin^{2005} x\right| + 2005 \cdot |x|^4} + \dfrac{3}{|x|^3}$. Să se arate că $\left|f(x) + \dfrac{1}{2}\right| - \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{9}{1 + |x|^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Ioan Şerdean, Orăştie

X.65. Fie $\mathcal{C}$ un cerc de rază 1 şi fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ puncte ale discului corespunzător. Arătaţi că există un semicerc închis $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ astfel încât $MP_1 + MP_2 + \cdots + MP_n \geq n$, $\forall M \in \mathcal{S}$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Clasa a XI-a

XI.61. Fie $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^{k+1} = aA^k$, să se arate că $I_n - A$ este inversabilă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.62. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar M un punct variabil pe $[AB]$. Notăm $\{S\} = CM \cap AD$, $\{E\} = SO \cap MD$. Se cere locul geometric al punctului E.

Petru Răducanu, Iaşi

XI.63. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(a) + f(b) < 1 + g(a) f(b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ pentru care

$$\left(\frac{f(c)}{b-c}\right)^3 + \left(\frac{g(c)}{a-c}\right)^3 + \left[\frac{2c-a-b}{(b-c)(a-c)}\right]^3 = \frac{3(2c-a-b) f(c) g(c)}{(b-c)^2 (a-c)^2}.$$

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

XI.64. Fie $f : (0,1) \to (0,\infty)$ o funcţie crescătoare cu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $f(x) \le x$, $\forall x \in (0,1)$. Definim şirurile $(a_n)_{n\ge 1}$, $(x_n)_{n\ge 1}$ prin $a_n = \frac{1}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}$ $(a > 0,\ b > 0)$ şi $x_n = [f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \cdots + f(a_{2n})]^{1/n}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.65. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, arătaţi că

$$\left[\left(\frac{x_1}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{A}\right) + 2\right] \cdot \left[\left(\frac{x_2}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_2}{A}\right) + 2\right] \cdot \ldots \cdot \left[\left(\frac{x_n}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_n}{A}\right) + 2\right] \le 6^n.$$

Să se obţină de aici inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică.

Dumitru Mihalache, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.61. Să se determine funcţiile derivabile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ care admit o primitivă $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ şi $F(x) f'(x) = F(x) f(x) - f^2(x) + x - 1$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.62. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ o funcţie continuă, iar F primitiva sa care se anulează în origine. Să se calculeze: *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} xF\left(\frac{1}{x}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

XII.63. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii surjective. Dacă $g \circ (g - f)$ este descrescătoare şi există $L > 1$ astfel încât $|g(x) - g(y)| \ge L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, să se arate că f are un unic punct fix.

Sorin Puşpană, Craiova

XII.64. Fie M mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile de două ori şi cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'' = \alpha f + 1$. Arătaţi că există o familie de grupuri $\{(G_\alpha, *_\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$ ce verifică simultan:

1) $(G_\alpha, *_\alpha) \simeq (\mathbb{R}^2, +)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $\{G_\alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ este o partiţie a mulţimii M.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

XII.65. Fie $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ numere prime, iar $\mathcal{P}$ mulţimea polinoamelor de grad n cu termenul liber 1 şi ceilalţi termeni distincţi în mulţimea $\left\{\frac{1}{p_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ relativ prim cu toate numerele p_i există $q, r \in \mathcal{P}$ astfel încât $0 \le |q(x) - r(x)| < \frac{37x^n + 42}{42n!}$. Dacă, în plus, $x \ge p_n - 1$, inegalitatea de mai sus este strictă.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G86. Fie $n \geq 3$ un număr natural impar, iar $A \subset \mathbb{N}$ o mulţime cu $n^2 - 2n + 2$ elemente. Să se arate că putem alege n numere din mulţimea A cu proprietatea că suma lor se divide cu n.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G87. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care putem găsi $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $2005 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Aflaţi valoarea minimă a lui n.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G88. Spunem că o mulţime $M \subseteq \mathbb{R}_+$ are proprietatea (P) dacă orice element din M este media geometrică a două elemente distincte ale lui M.

a) Să se arate că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea (P).

b) Găsiţi mulţimile cu 2005 elemente având proprietatea (P).

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

G89. Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

G90. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ se poate partiţiona în două submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Marian Tetiva, Bârlad

G91. Găsiţi cel mai mic număr natural k pentru care, oricum am colora o tablă de şah 8×8 cu k culori astfel încât fiecare culoare să fie folosită cel puţin o dată, există 6 căsuţe de culori diferite care se află pe aceeaşi linie sau coloană.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G92. Fie $\triangle ABC$, cu $[AB]$ cea mai scurtă latură. Bisectoarea unghiului C intersectează paralela dusă prin B la AC în M, iar latura AB în C'. Paralela prin C' la AC intersectează MA în P şi BC în Q. Arătaţi că înălţimile $\triangle ABC$ pot fi laturi ale unui triunghi dacă şi numai dacă $2AB > PQ$.

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

G93. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90°$, M – mijlocul lui $[BC]$, iar N punctul de contact al cercului înscris cu BC. Dacă $\widehat{BAN} \equiv \widehat{MAC}$, să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel.

Doru Buzac, Iaşi

G94. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 105°$, $m(\widehat{B}) = 30°$. Se consideră DE mediatoarea lui $[BC]$, $D \in BC$, $E \in AB$, $[CF$ bisectoarea lui $\widehat{BCE}$, $F \in AB$, iar $\{I\} = CF \cap DE$, $\{G\} = CE \cap AI$. Să se arate că $\triangle DFG$ este echilateral.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

G95. Fie $\triangle ABM$ dreptunghic în B. Fie C pe $[MA]$ astfel încât $MC = AB$. Să se arate că în $\triangle$ ABC, bisectoarea AD, mediana BE şi înălţimea CF sunt concurente.

Dan Brânzei, Iaşi

A. Nivel liceal

L86. Cercurile de centre I_a, I_b, I_c exînscrise $\triangle ABC$ sunt tangente laturilor $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$ în D, E, F. Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BI_aC}$ intersectează latura BC în M; fie $\{P\} = FE \cap AM$, iar $Q \in FD$, $S \in DE$ analog definite. Arătaţi că dreptele DP, EQ şi FS sunt concurente.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

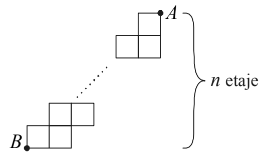
L87. Să se arate că un tetraedru cu muchiile în progresie geometrică şi în care perechile de muchii opuse sunt perpendiculare, este regulat.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L88. Fie $\triangle ABC$ de arie S, perimetru $2p$, având razele cercurilor circumscris şi înscris R, respectiv r. Notăm $k = \dfrac{8+3\sqrt{3}}{12}p + \dfrac{3}{4}r$. Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ discuri de centru A, B, C şi aceeaşi rază $\delta < r$. Pentru punctele $D \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{C}$, fie T aria $\triangle DEF$. Să se arate că, dacă $\varepsilon = k\delta$, atunci $|T - S| < \varepsilon$.

Dan Brânzei, Iaşi

L89. Câte drumuri de la A la B există, dacă din orice punct de pe traseu ne putem deplasa doar spre stânga sau în jos?



Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

L90. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ se poate partiţiona în trei submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă n este multiplu de 3, $n \geq 6$.

Marian Tetiva, Bârlad

L91. Punctele planului se colorează în 3 culori astfel încât fiecare culoare să fie folosită cel puţin o dată. Spunem despre un triunghi că este *aproape echilateral* dacă măsurile unghiurilor sale sunt cel mult $60,001^\circ$. Arătaţi că există un triunghi aproape echilateral cu vârfurile de culori diferite.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L92. Dacă $a_i \in (1, \infty)$, $\forall i = \overline{1,n}$, $n \geq 3$, iar $m, p \in \mathbb{N}$ cu $m > p \geq 1$, să se demonstreze inegalitatea

$$\log_{a_1} \frac{a_2^m + \cdots + a_n^m}{a_2^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}} + \log_{a_2} \frac{a_1^m + a_3^m \cdots + a_n^m}{a_1^{m-p} + a_3^{m-p} \cdots + a_n^{m-p}} + \cdots +$$
$$+ \log_{a_n} \frac{a_1^m + \cdots + a_{n-1}^m}{a_1^{m-p} + \cdots + a_{n-1}^{m-p}} \geq np.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

L93. Există vreun polinom $f(X, Y)$ în două nedeterminate astfel încât

$$\{f(m,n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^* = \left\{x_k^{2004} \mid k \geq 1\right\},$$

unde $x_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$?

Gabriel Dospinescu, Paris

L94. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu coeficienţi întregi, inversabilă şi astfel încât mulţimea $\left\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ este finită. Să se demonstreze că această mulţime are cel mult

3^{n^2} elemente. Rămâne rezultatul adevărat dacă suprimăm condiţia ca elementele matricei să fie întregi?

Gabriel Dospinescu, Paris

L95. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică, mărginită şi astfel încât există $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ există, sunt finite şi distincte. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x (f(t) + a)\, dt$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Training problems for mathematical contests

Junior high school level

G86. Let $n \geq 3$ be an odd natural number and let $A \subset \mathbb{N}$ be a set with $n^2 - 2n + 2$ elements. Prove that one can choose n elements in A such that their sum is divisible by n.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G87. Prove that there are infinitely many $n \in \mathbb{N}$ for which there exist $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, such that $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = 2005$. Find the minimal value of n for which the above property holds.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G88. A set $M \subseteq \mathbb{R}_+$ is said to have the property (P) if any element of M is the geometric mean of two distinct elements of M.

a) Prove that there are infinitely many sets having the property (P).

b) Find all sets with 2005 elements that satisfy (P).

Gabriel Popa and Paul Georgescu, Iaşi

G89. For $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, prove that

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right).$$

Marius Pachiţariu, high school student, Iaşi

G90. Let $k \in \mathbb{N}^*$. Prove that the set $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ can be divided into two subsets such that the sums of elements in each subset coincide if and only if $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ or $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Marian Tetiva, Bârlad

G91. Find the least value of $k \in \mathbb{N}$ such that for any coloring of an 8×8 chessboard with k colors, any color being used at least once, there are 6 differently colored squares which lie on the same line or column.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

G92. Let $[AB]$ be the shortest side of $\triangle ABC$. The bisector issued from the vertex C meets the parallel through B to AC in M and the side AB in C'. The parallel through C' to AC meets MA in P and BC in Q. Prove that the altitudes of $\triangle ABC$ can be the sides of a triangle iff $2AB > PQ$.

Valentina Blendea and Gheorghe Blendea, Iaşi

G93. Let $\triangle ABC$ with $m(A) \geq 90°$, let M be the midpoint of $[BC]$ and let N be the contact point of the inscribed circle of $\triangle ABC$ with the side BC. If $\widehat{BAN} \equiv \widehat{MAC}$, prove that $\triangle ABC$ is isosceles.

Doru Buzac, Iaşi

G94. Let $\triangle ABC$ with $m(\widehat{A}) = 105°$, $m(\widehat{B}) = 30°$. Let DE be the mediator of $[BC]$, $D \in BC$, $E \in AB$, let $[CF$ be the bisector of $\widehat{BCE}$, $F \in AB$, and let $\{I\} = CF \cap DE$, $\{G\} = CE \cap AI$. Prove that $\triangle DFG$ is equilateral.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

G95. Let $\triangle ABM$ be a right triangle with hypotenuse AM. Let $C \in MA$ such that $MC = AB$. Prove that the bisector AD, the median BE and the altitude CF are concurrent.

Dan Brânzei, Iaşi

High school level

L86. The excircles of centres I_a, I_b, I_c associated to $\triangle ABC$ are tangent to BC, AC, AB in D, E, F. The internal bisector of $\widehat{BI_aC}$ meets BC in M; let $\{P\} = FE \cap AM$ and $Q \in FD$, $S \in DE$ be determined similarly. Prove that DP, EQ and FS are concurrent.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L87. Prove that a tethraedron in which the opposite sides are perpendicular and the lengths of all sides are the terms of a geometric progression is regular.

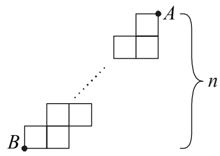
Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L88. Let $\triangle ABC$ of area S, perimeter $2p$, circumradius R and inradius r. Denote $k = \dfrac{8+3\sqrt{3}}{12}p + \dfrac{3}{4}r$. Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ be disks of centers A, B, C and radius $\delta < r$. Given $D \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{C}$, let T be the area of $\triangle DEF$. Prove that $|T - S| < k\delta$.

Dan Brânzei, Iaşi

L89. Find the total number of paths joining A and B if from any point of such a path one may move only downwards or to the left.

Irina Mustaţă, high school student, Iaşi



L90. Let $n \in \mathbb{N}^*$. Prove that the set $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ can be divided into three subsets such that the sums of elements in each subset are all equal if and only if n is divisible by 3 and $n \geq 6$.

Marian Tetiva, Bârlad

L91. All points in a plane are colored in three colors in such a way that any color is used at least once. We say that a triangle is almost equilateral if the measures of its angles are at most $60,001°$. Prove that there is an almost equilateral triangle such that its vertices are colored differently.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

L92. If $a_i \in (1, \infty)$ $\forall i = \overline{1, n}$, $n \geq 3$, and $m, p \in \mathbb{N}$, $m > p \geq 1$, prove that

$$\log_{a_1} \frac{a_2^m + \cdots + a_n^m}{a_2^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}} + \log_{a_2} \frac{a_1^m + a_3^m \cdots + a_n^m}{a_1^{m-p} + a_3^{m-p} \cdots + a_n^{m-p}} + \cdots +$$

$$+\log_{a_n}\frac{a_1^m+\cdots+a_{n-1}^m}{a_1^{m-p}+\cdots+a_{n-1}^{m-p}}\geq np.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

L93. Can one find a polynomial $f(X,Y)$ such that

$$\{f(m,n)\mid m,n\in\mathbb{Z}\}\cap\mathbb{N}^*=\left\{x_k^{2004}\mid k\geq 1\right\},$$

where $x_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$?

Gabriel Dospinescu, Paris

L94. Let $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ with integer coefficients, A invertible, such that $\left\{A^k;k\in\mathbb{N}\right\}$ is a finite set. Prove that this set has at most 3^{n^2} elements. Does the result still hold if A is not assumed to have integer coefficients?

Gabriel Dospinescu, Paris

L95. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a periodic and bounded function such that there is $x_0\in\mathbb{R}$ for which $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ are finite and distinct. Find $a\in\mathbb{R}$ for which $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x(f(t)+a)\,dt$ does not exist.

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iaşi

Premiile pe anul 2005 acordate de FUNDAŢIA CULTURALĂ "POIANA"

Fundaţia Culturală "Poiana" (director d-l **Dan Tiba**) acordă anual premii elevilor - colaboratori ai revistei *"Recreaţii matematice"* care se disting prin calitatea *articolelor*, *notelor* şi *problemelor originale* publicate în paginile acesteia.

Redacţia revistei decide ca pentru anul 2004 premiile oferite, în valoare de câte **1 000 000** lei, să fie atribuite următorilor elevi:

1. ZAHARIUC Adrian (*Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău*)
– Asupra problemei G67 (RecMat - 1/2005, 22-23);
– probleme propuse: IX.57, G81, L81 (1/2005) şi (2/2005);

2. MUSTAŢĂ Irina (*Colegiul Naţional, Iaşi*)
– Matematică şi algoritmică (RecMat - 1/2005, 24-26),
– probleme propuse: L80 (1/2005) şi L89 (2/2005).

Premiile se pot ridica direct de la redacţie sau pot fi trimise prin mandat poştal la adresa elevului premiat.