Probleme propuse[1]

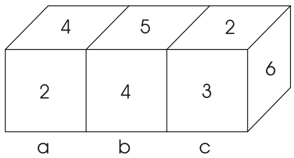
Clasele primare

P.74. Descoperă regula de formare, apoi completează şirurile următoare:
a) 1,2,3; 2,3,5; 3,□,□; 5,□,□.
b) 11,10,12; 13,12,14; 15,□,□; 17,□,□.
c) 2,6,4; 3,7,5; 4,8,6; 5,□,□; 6,□,□.
(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.75. Răspundeţi la următoarele întrebări:
a) De câte suprafeţe este mărginit cubul?
b) Ce formă au feţele cuboidului?
c) Ce formă are un obiect care se aseamănă cu sfera?
(*Clasa I*) **Aliona Loghin, elevă, Iaşi**

P.76. Completaţi casetele din expresia 6□5□4□3□2□1 cu semnele grafice "+" sau "−" pentru a obţine cel mai mic rezultat posibil.
(*Clasa a II-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

P.77. Un corp este format din trei cuburi a, b, c ca în figura alăturată. Fiecare cub are feţele numerotate de la 1 la 6, iar suma numerelor de pe oricare două feţe opuse ale sale este 7. Ştiind că pe feţele lipite ale cuburilor a şi b este scris acelaşi număr şi că aceeaşi proprietate o au şi cuburile b şi c, să se afle suma tuturor numerelor scrise pe feţele corpului care nu se văd.



(*Clasa a II-a*) **Oxana Pascal, elevă, Iaşi**

P.78. *a*) Verifică egalităţile: $1+3+5+7=4\times 4$, $1+3+5+7+9+11=6\times 6$;
b) Scrie rezultatul la fel ca la punctul *a*) pentru $1+3+5+7+\cdots+19$.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, studentă, Iaşi**

P.79. 7 elevi mănâcă 7 ingheţate în 6 minute. Câţi elevi vor mânca 24 îngheţate în 36 minute?
(*Clasa a III-a*) **Alexandru Tudorache, elev, Iaşi**

P.80. Două oraşe sunt legate printr-o linie de cale ferată. La fiecare oră pleacă un tren din fiecare oraş către celălalt. Toate trenurile merg cu aceeaşi viteză şi fiecare călătorie de la un oraş la altul durează 6 ore. De câte ori fiecare tren, care parcurge distanţa dintre oraşe, se întâlneşte cu trenuri care merg în sens opus?
(*Clasa a IV-a*) **Alexandru Tudorache, elev, Iaşi**

P.81. Să se arate că din feţele unui cub confecţionat din carton putem construi, fără resturi, feţele a şase cuburi.
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P.82. Să se afle cel mai mare număr natural de forma $\overline{abcd}$ cu proprietăţile: $a\neq d$, $b+c=5\,(a+d)$.
(*Clasa a IV-a*) **Adrian Andronic, elev, Iaşi**

P.83. Mircea împreună cu fratele său au un număr de bomboane mai mic decât 30. Mircea are de 3 ori mai multe decât fratele său. Aflaţi câte bomboane trebuie să

[1] Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2005.

îi dea Mircea fratelui său pentru a rămâne cu un număr de două ori mai mare decât al fratelui. Câte bomboane avea Mircea la început şi cu câte a rămas?
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Tudor Tudorache, Craiova**

Clasa a V-a

V.51. Între oricare două numere naturale definim operaţia $a * b = a^b + a$.

a) Să se rezolve ecuaţia $2 * (x+1) = 34$.

b) Este operaţia dată comutativă?

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

V.52. Un dreptunghi se poate descompune în 1344 pătrate de arie 25 cm^2. Aflaţi perimetrul dreptunghiului dacă acesta este: a) maxim posibil; b) minim posibil.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

V.53. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\frac{\dfrac{3}{2} - \left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}\right)}{\dfrac{5}{4} - \left(1 + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}\right)} = \frac{2 + 6 + \cdots + 98}{1 + 3 + \cdots + 17}.$$

Viorel Cornea, Hunedoara

V.54. Să se arate că nu există numere raţionale pozitive a, b, c astfel încât $\dfrac{a+b}{ab} = 2^{2003}$, $\dfrac{b+c}{bc} = 2^{2004}$ şi $\dfrac{c+a}{ca} = 2^{2005}$.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

V.55. Fie numărul raţional $N = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} + \cdots + \dfrac{2004}{a_{2004}}$, unde $a_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1, 2004}$. Să se arate că există $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$ astfel încât $N = \dfrac{1}{2005}$. Generalizare.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.51. Pentru efectuarea unei lucrări, trei muncitori au fost retribuiţi cu sume de bani direct proporţionale cu numerele 16, 14, 17. Unul dintre muncitori constată că dacă sumele primite ar fi fost invers proporţionale cu numerele 3, 4, 5, el ar fi primit mai puţin cu 1000000 lei. Aflaţi ce sumă de bani a primit fiecare muncitor.

Ion Vişan, Craiova

VI.52. Determinaţi numerele întregi n care pot fi scrise sub forma $n = \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c}$, cu a, b, $c \in \mathbb{Z}^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.53. Se dă unghiul ascuţit $\widehat{xOy}$ şi punctele $A, B \in (Ox$, $C, D \in (Oy$ astfel încât $A \in (OB)$, $C \in (OD)$, $AB \neq CD$ şi $t \cdot OA + s \cdot AB = t \cdot OC + s \cdot CD$, cu $s, t \in \mathbb{R}^*$. Atunci mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ şi bisectoarea lui $\widehat{xOy}$ sunt trei drepte concurente dacă şi numai dacă $t = 2s$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

VI.54. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AB = AC$), N mijlocul lui $[AC]$, iar D un punct pe prelungirea lui $[BC]$ astfel încât $CD < BC$. Să se arate că între triunghiurile ABN şi NCD nu există nici o congruenţă.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VI.55. Fie punctele O, A_1, A_2, A_3, $\ldots$ astfel încât $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \cdots = 1$ cm, iar $m(\widehat{A_1OA_2}) = 1°$, $m(\widehat{A_2OA_3}) = 2°$, $m(\widehat{A_3OA_4}) = 3°$ etc. (toate unghiurile se consideră în sens orar). Să se arate că există $k \neq l$ astfel încât $A_k = A_l$.

Cristian Lazăr, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.51. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^{2004} - a$ se divide cu $n - b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \neq b$. Să se arate că $a = b^{2004}$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VII.52. Fie a, b, $c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 0$; să se arate că

$$\left(a^3 - b^3\right)^3 + \left(b^3 - c^3\right)^3 + \left(c^3 - a^3\right)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ac\right)\left(c^2 - ab\right).$$

Anca Tuţescu, elevă, Craiova

VII.53. Determinaţi m, n, $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluţia inecuaţiei $|mx - 1| \leq n$ să fie $[p, p + m + 1]$.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VII.54. Se consideră unghiul $\widehat{xOy}$ de măsură $10°$ şi un segment $[MN]$ de lungime a. Să se construiască, folosind numai rigla şi compasul, un triunghi dreptunghic OAB, $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, având o catetă de lungime a.

Florin Asăvoaie, elev, Iaşi

VII.55. Fie $ABCD$ patrulater convex, iar $\{O\} = AC \cap BD$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ taie laturile (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) în M, N, P, respectiv Q. Să se arate că dreptele MQ, NP şi BD sunt concurente sau paralele.

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.51. Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $h(x) = 3$. Notăm $\{A\} = G_g \cap G_h$, $\{B\} = G_f \cap G_h$, iar C şi D sunt punctele de intersecţie ale dreptei $x = 2$ cu G_f, respectiv G_g. Determinaţi măsurile unghiurilor, perimetrul şi aria patrulaterului $ABCD$.

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

VIII.52. Fie $E(x, y) = 2004 - 2x^2 - 5y^2 + 2xy + 6y$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. Determinaţi valoarea maximă a lui E.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VIII.53. Să se arate că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3b^2c^2 \geq 2\left(a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + b^3c + bc^3\right).$$

Marian Tetiva, Bârlad

VIII.54. Pentru $a, b, c \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$a + \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < \frac{2a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < a + \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Radu Frunză şi Mircea Coşbuc, elevi, Iaşi

VIII.55. O piramidă triunghiulară regulată este tetraedru regulat dacă şi numai dacă unghiurile făcute de o faţă laterală cu planul bazei, respectiv cu o altă faţă laterală, sunt congruente.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.51. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_1 = 1+2-3$; $a_2 = a_1+4+5+6-7-8$; $a_3 = a_2+9+10+11+12-13-14-15$ etc.

a) Să se determine semnele cu care apar 100 în a_{100}, respectiv 91 în a_{91}.

b) Să se afle formula termenului general al şirului.

Lidia Nicola, Craiova

IX.52. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: $f(0) = 2004$, f este pară, g este impară şi există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încat $f(x) = f\left(x^2+x+a\right)$, $g(x) = g\left(x^2+x+b\right)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

IX.53. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$|f(x+y+z+t) + \cos x + \cos y + \cos z + \cos t| < 4, \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}?$$

Lucian Tuţescu, Craiova

IX.54. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a, iar $T \in (AD)$ astfel încât $m(\widehat{ABT}) = \alpha$. Notăm $\{S\} = AC \cap BT$ şi fie R punctul în care perpendiculara în S pe BT intersectează AB.

a) Să se arate că $\triangle RST$ este isoscel.

b) Să se exprime RS funcţie de a şi α.

Gheorghe Costovici, Iaşi

IX.55. Fie ABC un triunghi cu $c < b$. Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ şi cu D şi E punctele de tangenţă a cercurilor înscris şi respectiv A- exînscris triunghiului cu latura $[BC]$. Arătaţi că

(*i*) ME şi ND se intersectează pe mediana din vârful A;

(*ii*) $MD \parallel NE \Leftrightarrow a = 2(b-c)$;

(*iii*) dacă $a \neq 2(b-c)$, atunci MD şi NE se intersectează pe prelungirea medianei din A.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.51. Fie $OABC$ un tetraedru cu $OA \perp OB \perp OC$, circumscris unei sfere de rază r. Dacă R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci $\dfrac{R}{r} \leq \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

X.52. Fie polinomul

$$P(X) = \left(1+X+X^2\right)^{6n+1} = \sum_{k=0}^{12n+2} a_k X^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

X.53. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $a+b+c = 9$. Să se arate că

$$\log_a\left(2b^3+c^3\right) + \log_b\left(2c^3+a^3\right) + \log_c\left(2a^3+b^3\right) \geq 12.$$

Angela Ţigăeru, Suceava

X.54. Definim mulţimile A_k, $k \geq 1$, prin

$$A_1 = \left\{\frac{n}{2003} \mid n = 1, 2, \ldots, 10000\right\} \setminus \{1\}; \quad A_k = (A_{k-1} \setminus \{a, b\}) \cup \left\{a^{2\lg b}\right\},$$

cu $a, b \in A_{k-1}$ arbitrare, $k \geq 2$. Să se determine A_{9999}.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

X.55. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a^2 - 4b < 0$, iar ε o soluţie a ecuaţiei $x^2 + ax + b = 0$. Definim funcţia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = x^2 - axy + by^2$. Pentru orice pereche $(x, y) \in f^{-1}(1)$, să se arate că $(x + \varepsilon y)^{\operatorname{card} f^{-1}(1)} = 1$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.51. Să se calculeze determinantul unei matrice pătratice de ordinul patru care are toţi minorii de ordin trei egali.

Lucian - Georges Lăduncă, Iaşi

XI.52. Fie funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$, $f(A) = \det\left(A^2 + I_2\right)$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $f(A) = (\det A - 1)^2 + (\operatorname{tr} A)^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Să se demonstreze că f este surjectivă, dar nu este injectivă.

Ovidiu Pop, Satu Mare

XI.53. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$; pentru $n \geq 3$, definim

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) - \sin\alpha \\ \cos\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 3}$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} |\Delta_k|$.

Gheorghe Croitoru şi Gabriel Popa, Iaşi

XI.54. Fie $k \in \mathbb{N}^*$; să se arate că ecuaţia $x^{n+k} - x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$ are o singură soluţie pozitivă, pe care o notăm x_n. Să se arate apoi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent; ce se poate spune despre limita sa?

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

XI.55. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(x^{2n+1} + x\right) \leq x \leq f^{2n+1}(x) + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $n \in \mathbb{N}$. (În legătură cu problema 2811 din *Crux Mathematicorum*, nr. 1/2003)

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a XII-a

XII.51. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$, $p < 2$, este convergent.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

XII.52. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(x) + f'(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{(2e - 5) f(1)}{5} + \frac{4}{e} \int_1^2 \frac{xe^x f(x - 1)}{\left(x^2 + 1\right)^2}\, dx.$$

Mihail Bencze, Braşov

XII.53. Prove that

$$\frac{2\left(e^x - 1\right)}{e^x + 1} \leq \int_{-x}^{x} \frac{\sqrt{e^t}}{e^t + 1}\, dt \leq x, \quad \forall x \geq 0.$$

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia and Montenegro

XII.54. Să se afle funcţiile continue $u = u(t)$, soluţii ale ecuaţiei

$$u(t) = \alpha + \int_0^t b(s)\, u(s)\, ds + \int_0^a b(s)\, u(s)\, ds, \quad 0 \le t \le a,$$

unde α este constantă, iar $b = b(t)$ este continuă pe $[0, a]$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.55. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există monoizi care nu sunt grupuri şi care conţin exact n elemente inversabile.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G66. Se consideră mulţimea $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, mn+1\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$. Să se afle câte valori distincte poate lua suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Petru Asaftei, Iaşi

G67. Fie $b \in \mathbb{N}$, $b \ge 2$. Spunem că un număr natural este *decompozabil* dacă se poate scrie ca suma a două numere cu aceeşi sumă a cifrelor în baza b. Să se arate că există o infinitate de numere care nu sunt decompozabile.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G68. Fie $N \in \mathbb{N}^*$; să se arate că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât factorialul niciunui număr natural să nu se termine cu n, $n+1$, $\ldots$, $n+N$ zerouri.

Iuliana Georgescu, Iaşi

G69. Fie $E(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. Dacă $a + b + c \in \mathbb{Z}$, arătaţi că există o infinitate de numere întregi n astfel încât $E(n)$ să fie număr întreg.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G70. Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 + 3x + y - 707 = 0$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}^2$.

Dan Popescu, Suceava

G71. Fie $(m, n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{(m+n)\,a^2 + mb^2 + nc^2} + \frac{b}{(m+n)\,b^2 + mc^2 + na^2} + \frac{c}{(m+n)\,c^2 + ma^2 + nb^2} \le$$

$$\le \frac{1}{2(m+n)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad \forall a, b, c \in (0, \infty).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

G72. Fie $\triangle ABC$ circumscris cercului de centru I. Cercul de diametru $[AI]$ intersectează bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ în M, respectiv N. Să se arate că M şi N se află pe dreapta suport a liniei mijlocii paralele cu BC.

Doru Buzac, Iaşi

G73. Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Considerăm $N \in (AO)$, M mijlocul lui $[AD]$, $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Să se arate că $NE \perp BC$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G74. Fie n puncte în spaţiu astfel încât oricare patru să formeze tetraedre de volum cel mult 1. Să se arate că există un tetraedru de volum cel mult 27 care să conţină în interior toate cele n puncte.

Tudor Chirilă, elev, Iaşi

G75. Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat de latură 1, $n \geq 4$. Pe latura $[A_1A_2]$ se consideră punctul P_1 cu $P_1A_1 = a \in (0,1)$. Din punctul P_1 se propagă o rază de lumină care se reflectă de laturile $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ... , generând pe laturi punctele de incidenţă P_2, P_3, ... (presupunând că raza de lumină nu ajunge niciodată într-un vârf al poligonului) astfel încât $m(\widehat{A_2P_1P_2}) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Să se afle valoarea minimă a lui l pentru care P_l şi P_{l+1} nu aparţin la două laturi consecutive.

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

B. Nivel liceal

L66. Fie ABC un triunghi, D şi D_a punctele în care cercurile înscris şi A-exînscris sunt tangente la BC şi E_b, F_c punctele în care cercurile B-exînscris şi C-exînscris sunt tangente la AC şi respectiv AB. Să se arate că punctele D, D_a, E_b, F_c sunt conciclice dacă şi numai dacă $AB = AC$ sau $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L67. Dreptele paralele t_1 şi t_2 sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ de centru O. Cercul $\mathcal{C}_1$ de centru O_1 este tangent la t_1 şi $\mathcal{C}$, iar cercul $\mathcal{C}_2$ de centru O_2 este tangent la t_2, $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1$; cele trei cercuri sunt exterioare unul celuilalt. Să se arate că unghiul $\widehat{O_1OO_2}$ este ascuţit şi să se afle valoarea maximă a măsurii acestuia.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L68. *a*) Pentru $x, y, z \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

b) Folosind eventual *a*), să se arate că în orice triunghi, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea

$$\sqrt{1 + 4\cdot\frac{R}{r}} \geq 1 + \sqrt{\frac{p-a}{p-b}} + \sqrt{\frac{p-b}{p-a}}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L69. Pentru ce numere naturale $n \geq 3$, există în plan n puncte albastre şi n puncte roşii, oricare trei necoliniare, astfel încât în interiorul oricărui triunghi cu vârfurile albastre să existe cel puţin un punct roşu, iar în interiorul oricărui triunghi cu vârfurile roşii să existe cel puţin un punct albastru?

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L70. Fie $k, p \in \mathbb{N}^*$ şi un dreptunghi de dimensiuni $82k \times 2p$, acoperit complet şi fără suprapuneri cu dreptunghiuri 7×5 şi 6×4. Să se arate că numărul pătrăţelelor (x, y), x par, y impar, ale dreptunghiului mare, care sunt colţuri în dreptunghiuri 7×5, este egal cu numărul de dreptunghiuri 7×5. (Prin dreptunghiuri 7×5 înţelegem dreptunghiuri cu lungimea egală cu 7 şi lăţimea egală cu 5.)

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

L71. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat. Să se determine cea mai tare inegalitate de forma

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + n^2 - 1} \leq m \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + M,$$

unde m, M nu depind de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valabilă pentru orice numere $a_1, a_2, \ldots,$ a_n pozitive şi cu produsul 1.

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

L72. Fie a, b numere raţionale, pozitive, distincte, astfel încât $a^n - b^n \in \mathbb{Z}$ pentru o infinitate de numere naturale n. Să se arate că a şi b sunt întregi.

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

L73. Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$. Să se determine $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pentru care

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_k}}} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_k \in [0, \infty).$$

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

L74. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $\int_a^b x^k f(x)\, dx = 0$ pentru $0 \leq k \leq n$, atunci f are cel puţin $n + 1$ zerouri distincte în (a, b).

Andrei Nedelcu, Iaşi

L75. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care este adevărată inegalitatea

$$\cos\varphi < \frac{1}{\sqrt[8]{1 + n\sin^4\varphi}}, \quad \forall \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Training problems for mathematical contests

Junior high school level

G66. Considering the set $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, mn+1\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, find the number of distinct values taken by the sum $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, when $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Petru Asaftei, Iaşi

G67. Let $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. It is said that $G \in \mathbb{N}$ is *decomposable* if we can write G as a sum of two numbers such that their expansions in the basis b have the same sum of digits. Prove that there exist infinitely many numbers which are not decomposable.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

G68. Let $N \in \mathbb{N}^*$. Prove that there is $n \in \mathbb{N}$ such that no factorial ends in n, $n + 1, \ldots, n + N$ zeros.

Iuliana Georgescu, Iaşi

G69. Let $E(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. If $a + b + c$ is an integer, prove that there exist infinitely many integers n such that $E(n)$ is also an integer.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G70. Prove that the equation $x^2 + y^2 + 3x + y - 707 = 0$ has no solutions in $\mathbb{Q}^2$.

Dan Popescu, Iaşi

G71. Let $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Prove that

$$\frac{a}{(m+n)\,a^2+mb^2+nc^2}+\frac{b}{(m+n)\,b^2+mc^2+na^2}+\frac{c}{(m+n)\,c^2+ma^2+nb^2}\leq$$
$$\leq \frac{1}{2\,(m+n)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad \forall a,b,c\in(0,\infty)\,.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

G72. Let I be the incenter of a triangle ABC. The circle with diameter $[AI]$ meets the bisectors of $\widehat{B}$ and $\widehat{C}$ in M, respectively N. Prove that M and N lie on the line joining the midpoints of $[AB]$ and $[AC]$.

Doru Buzac, Iaşi

G73. Let $ABCD$ be a rectangle with center O. Let $N \in (AO)$, let M be the midpoint of $[AD]$ and let $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Prove that $NE \perp BC$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G74. Let us consider n points such that any given four are the vertices of a tethraedron with volume at most 1. Prove that there is a tethraedron with volume at most 27 which contains all n points in its interior.

Tudor Chirilă, high school student, Iaşi

G75. Let $A_1A_2\dots A_n$ be a regular n-gon with side 1, $n \geq 4$. We consider P_1 on the side $[A_1A_2]$ such that $P_1A_1 = a \in (0,1)$. A ray of light is emitted from P_1 towards and is reflected by the sides $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ... , generating the incidence points P_2, ... , P_n (supposing that the ray never meets the vertices A_1, A_2, ... , A_n) such that $m(\widehat{A_2P_1P_2}) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Find the minimal value of l such that P_l and P_{l+1} do not belong to adjacent sides.

Irina Mustaţă, high school student, Iaşi

High school level

L66. Let ABC be a given triangle and let D, D_a be the points in which the incircle, respectively the A-escribed circle are tangent to the side BC. Let also E_b, F_c be the points in which the B-escribed and C-escribed circles are tangent to the side AC, respectively to the side AB. Prove that D, D_a, E_b, F_c are concyclic if and only if $AB = AC$ or $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L67. The parallel lines t_1 and t_2 are tangent to the circle $\mathcal{C}$ with center O, the circle $\mathcal{C}_1$ with center O_1 is tangent to t_1 and $\mathcal{C}$ and the circle $\mathcal{C}_2$ with center O_2 is tangent to t_2, $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ being exterior to each other. Prove that the angle $\widehat{O_1OO_2}$ is acute and find the minimum value of its measure.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L68. *a*) Prove that, for $x,y,z \in (0,\infty)$,

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

b) Using *a*), prove that

$$\sqrt{1+4\cdot\frac{R}{r}}\geq 1+\sqrt{\frac{p-a}{p-b}}+\sqrt{\frac{p-b}{p-a}}$$

for any given triangle with the usual notations.

Marian Tetiva, Bârlad

L69. Find $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, such that there are n blue points and n red points in the same plane, no three points being collinear, such that the interior of any triangle with blue vertices contains at least one red point and the interior of any triangle with red vertices contains at least one blue point.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

L70. Let $k,p\in\mathbb{N}^*$ and let a $82k\times 2p$ rectangle which is completely covered with 7×5 and 6×4 rectangles with no superpositions. Prove that the number of squares (x,y) with side 1, x even, y odd, which are vertices of 7×5 rectangles equals the total number of 7×5 rectangles. (By a 7×5 rectangle we mean a rectangle with length 7 and height 5).

Marius Pachiţariu, high school student, Iaşi

L71. Let $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Find the best constants m, M such that

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+n^2-1}\leq m\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k+M$$

for any $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ satisfying $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$.

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

L72. Let $a,b\in\mathbb{Q}$, $a,b>0$, $a\neq b$ such that $a^n-b^n\in\mathbb{Z}$ for infinitely many $n\in\mathbb{N}$. Prove that $a,b\in\mathbb{Z}$.

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

L73. Let $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geq 3$. Find $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ such that

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_k}}}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_k},\quad\forall a_1,a_2,\ldots,a_k\in[0,\infty).$$

Gabriel Popa and Paul Georgescu, Iaşi

L74. Let $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ and $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. If $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is a continuous function such that $\int_a^b x^k f(x)\,dx=0$ for any $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq n$, then f has at least $n+1$ distinct zeros in (a,b).

Andrei Nedelcu, Iaşi

L75. Find $n\in\mathbb{N}$ such that

$$\cos\varphi<\frac{1}{\sqrt[8]{1+n\sin^4\varphi}},\quad\forall\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Cătălin Calistru, Iaşi