Probleme propuse

Clasele primare

P.54. Calculaţi a şi b dacă $46 - a = 36 + a$ şi $b - 3 = 17 - b$.
(*Clasa I*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

P.55. În câte moduri pot fi aranjate în linie dreaptă 9 mingi roşii şi una galbenă?
(*Clasa I*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

P56. Cu cinci ani în urmă, suma vârstelor a trei copii era de 11 ani. Care va fi suma vârstelor aceloraşi copii peste 6 ani?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

P.57. În câte moduri pot fi împărţiţi 8 băieţi în două echipe de câte 4 jucători, dacă Petru vrea să fie în echipă cu Mihai şi Dan, dar nu vrea să fie cu Avram?
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

P. 58. Să se arate că suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$ împărţită la 3 dă restul 1.
(*Clasa a III-a*) **Alexandru - Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

P.59. Fie a şi b două numere consecutive. Suma acestor numere împreună cu numerele obţinute mărind cu 12 fiecare dintre vecinii lor este 939. Care sunt cele două numere?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.60. Din 16 bile, una este mai grea decât celelalte 15, care au mase egale. Care este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate stabili bila mai grea?
(*Clasa a III-a*) **Carmen Ciolacu, elevă, Iaşi**

P.61. Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este 3. Diferenţa dintre cele două numere este 7. Care sunt cele două numere?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.62. Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se constată că la fiecare 30 minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut iar celălalt avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasuri sunt: 18 h 36 min şi 19 h 24 min. La ce oră au început să funcţioneze?
(*Clasa a IV-a*) **Felicia Amihăiesei, elevă, Iaşi**

P.63. Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un număr format din două cifre. Scoate din numărul format de 99 ori numărul format din trei cifre. Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de două cifre şi scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se explică acest lucru?
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.41. Fie a număr natural compus astfel încât dacă $p \mid a$, cu p prim, atunci $p + 1 \mid a$. Să se arate că $12 \mid a$ şi să se afle cel mai mare număr a de trei cifre.

Ciprian Baghiu, Iaşi

V.42. Se dau numerele $\overline{xy}$, $\overline{ab}$ scrise în baza 10 astfel încât $\overline{xy}$ divide $\overline{ab}$. Să se arate că $x = y$ dacă şi numai dacă $a = b$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.43. Să se afle cifrele a şi b ştiind că $a \cdot b = \overline{cd}$ şi $a^b = \overline{dc}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

V.44. Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ pentru care $x^n = yz$, $y^n = xz$, $z^n = xy$, cu $n \in \mathbb{N}$.

N. N. Hârţan, Iaşi

V.45. Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg trei urne şi se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.

a) Compoziţia urnelor fiind $0, 0, 4, 6, 6, 8$, să se indice o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

b) Compoziţia urnelor fiind $0, 1, 2, 3, 4, 4$, să se arate că nu există o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.41. Pe opt cartonaşe sunt înscrise câte unul din numerele 1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 3^4. Dacă $P(k)$ este probabilitatea ca, extrăgând două cartonaşe, numerele obţinute să aibă în total k divizori distincţi, să se rezolve inecuaţia $P(k) \geq 1/7$.

Dumitru Dominic Bucescu, Iaşi

VI.42. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru care $84x + 91y + 98z = 2002$. Să se afle valoarea maximă a sumei $x + y + z$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

VI.43. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^*$ pentru care $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\exists i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se arate că $n \geq 6$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.44. Fie $ABCD$ un paralelogram şi MAB, NAD triunghiuri echilaterale construite în exteriorul acestuia. Demonstraţi că $[MN] \equiv [BD]$ dacă şi numai dacă $ND \parallel MB$.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VI.45. Fie E, F picioarele înălţimilor din B şi C ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Dacă P, N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar $\{Q\} = PE \cap FN$, să se arate că $m(\widehat{PQF}) = \left|180^\circ - 3 \cdot m(\widehat{A})\right|$. (*În legătură cu Q1086 din **Parabola**, nr. 3/2000*)

Titu Zvonaru, Bucureşti

Clasa a VII-a

VII.41. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VII.42. Să se arate că $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|a|)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

VII.43. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distincte ale lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ şi $n = b + a$ constituie aceeaşi reprezentare). Să se arate că:

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \dfrac{1}{2}\left[1 + (-1)^{mn}\right]$; *b*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Petru Minuţ, Iaşi

VII.44. Fie $[AB]$ diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru $O, N, M \in \mathcal{C}$ astfel încât $m(\widehat{AON}) = 36°$, iar $[OM$ este bisectoare pentru $\widehat{NOB}$. Dacă T este simetricul lui O faţă de MN, să se arate că proiecţia lui T pe AB este mijlocul lui $[AO]$.

Valentina Blendea, Iaşi

VII.45. Fie $\triangle ABC$ echilateral, iar $P \in (BC)$. Notăm cu D, E simetricele lui P faţă de AC, respectiv AB. Să se arate că dreptele AP, BD şi CE sunt concurente.

Constantin Cocea şi Julieta Grigoraş, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.41. Fie f_1, f_2, f_3 funcţii liniare ale căror grafice sunt drepte concurente două câte două. Cele trei drepte sunt concurente dacă şi numai dacă există unic $\beta \in \mathbb{R}$ şi există $u \neq v \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\frac{f_1(u)-\beta}{f_1(v)-\beta} = \frac{f_2(u)-\beta}{f_2(v)-\beta} = \frac{f_3(u)-\beta}{f_3(v)-\beta}, \quad \text{cu} \quad f_i(v) \neq \beta, i \in \{1,2,3\}.$$

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VIII.42. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-xz}} +$$

$$+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz}} \leq 2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.43. Dacă un triunghi dreptunghic are laturile numere naturale, iar suma catetelor este pătrat perfect, atunci suma cuburilor catetelor este sumă de două pătrate.

Andrei Nedelcu, Iaşi

VIII.44. Pe laturile $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ şi $[BD]$ ale tetraedrului $ABCD$ se iau respectiv punctele M, N, P, Q, R, S astfel ca $\frac{BP}{BC} = \frac{AQ}{AD}$, $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$, $\frac{AR}{AC} = \frac{DS}{BD}$. Notăm cu V_1, V_2, V_3, V_4, V respectiv volumele tetraedrelor $AMRQ$, $BPMS$, $CPNR$, $DNQS$ şi $ABCD$. Să se arate că $2^{12}V_1V_2V_3V_4 \leq V^4$.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VIII.45. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k$ puncte pe un cerc $\mathcal{C}$. Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru a putea înscrie în $\mathcal{C}$ un poligon regulat cu n laturi, ce admite punctele date ca vârfuri (nu neapărat consecutive).

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.41. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, notăm cu $u_2(n)$ numărul format din ultimele două cifre ale lui n. Să se arate că:

a) $u_2\left(a^{20k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{4, 5, \ldots, 23\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, 8\}$;

b) $u_2\left(a^{10k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{4, 9\}$;

c) $u_2(5^n) = 25$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

d) $u_2\left(6^{5k+p}\right) = u_2(6^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, $k \in \mathbb{N}$;

$e)$ $u_2\left(7^{4k+p}\right) = u_2\left(7^p\right)$, $p \in \{2,3,4,5\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.42. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

$a)$ Dacă $|abc| > 1$, să se arate că unul dintre numere este mai mare în modul ca 1, iar altul mai mic în modul ca 1.

$b)$ Să se afle numerele dacă $|abc| = 1$.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

IX.43. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $a \in (1, \infty)$. Ştiind că

$$f\left(x^2 + ax - a\right) \geq f^2\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 1, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

să se arate că f nu este injectivă.

Titu Zvonaru, Bucureşti

IX.44. Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, să se găsească maximul expresiei $E = \sin A \cdot \sqrt{\cos A} + \sin B \cdot \sqrt{\cos B} + \sin C \cdot \sqrt{\cos C}$.

Cezar Lupu, elev, şi Tudorel Lupu, Constanţa

IX.45. Demonstraţi că $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea

$$\sum \frac{h_a h_b m_c}{m_a m_b m_c + h_a h_b m_c + m_a m_b i_c} = 1,$$

suma fiind obţinută prin permutări circulare, iar notaţiile fiind cele uzuale, este echilateral.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Clasa a X-a

X.41. Prove the inequality $\dfrac{F_{2n}^2}{F_{n-1} \cdot F_n} \leq \dbinom{2n}{n}$, where the Fibonacci numbers F_n are defined by $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Muntenegro

X.42. Să se rezolve ecuaţia $2^{[x]} + 6^{[x]} + 7^{[x]} = 3^{[x]} + 4^{[x]} + 8^{[x]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

X.43. Fie f o funcţie reală nenulă cu proprietatea că

$$f(x + y - xy) = f(x + y) - f(x) f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

X.44. Urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ conţin fiecare câte a bile albe şi b bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă care se depune într-o altă urnă U. Din urna U se scoate o bilă şi se constată că este albă. Care este compoziţia cea mai probabilă a urnei U?

Petru Minuţ, Iaşi

X.45. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că există un triunghi $A'B'C'$ astfel încât $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, iar $m(\widehat{AC'B'}) = m(\widehat{BA'C'}) = m(\widehat{CB'A'}) = \alpha \in (0, 90]$. Dacă în plus $\triangle ABC$ este echilateral, să se calculeze lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$ în funcţie de $a = BC$ şi α. (*În legătură cu o problemă propusă la* ***O. N. M.****, 2002*)

Dan Popescu, Suceava

Clasa a XI-a

XI.41. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\sum\limits_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k)} = I_n$, unde S_k este mulţimea permutărilor de ordin k. Să se arate că $n \,\vdots\, k!$.

Vladimir Martinuşi, Iaşi

XI.42. Prin punctele M_1 şi M_2 ale unei elipse se duc normalele la elipsă, care intersectează una din axele de simetrie ale acesteia în M_1', respectiv M_2'. Să se arate că mediatoarea segmentului $[M_1 M_2]$ trece prin mijlocul lui $[M_1' M_2']$. Rămâne proprietatea adevărată pentru hiperbolă sau pentru parabolă?

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.43. Considerăm şirul de funcţii $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx + \ln x - (n-1)$ şi fie x_n soluţia unică a ecuaţiei $f_n(x) = 0$. Să se calculeze limitele şirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $\left((x_n)^n\right)_{n \geq 1}$.

Angela Ţigăeru, Suceava

XI.44. Să se determine funcţiile continue $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ pentru care $f(x) = f\left(\sqrt{2x^2 - 2x + 1}\right)$, $\forall x > 0$.

Marian Ursărescu, Roman

XI.45. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ cu $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Definim $x_n = \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \ldots + b_k a_k^n}$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a_k$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n(x_n - a_k) = a_k \ln b_k$;

c) Dacă $b_k = 1$, are loc $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = a_k b_{k-1}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.41. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}}\,dx$, unde $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Oana Marangoci, studentă, Iaşi

XII.42. Fie $f : \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) \sin 2x \, dx = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că există $c \in \left(\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât $f(c) \in (1, 2)$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.43. Să se arate că

$$1 - \frac{\ln a}{3} \leq \int_0^1 a^{-x^2} dx \leq \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\ln a}}{\sqrt{\ln a}}, \quad \forall a > 1.$$

Petru Răducanu, Iaşi

XII.44. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale polinomului $P \in \mathbb{Z}[X]$ de grad minim, care admite rădăcina $\alpha^2 + \alpha$, unde α verifică ecuaţia $x^3 - x + 1 = 0$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

XII.45. Fie $\sigma \in S_5$. Să se arate că σ^2 are puncte fixe dacă şi numai dacă σ^3 are puncte fixe.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G46. Determinaţi ultimele cinci cifre ale numărului
$$A = 7^{2000} + 7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003}.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

G47. Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care soluţiile sistemului
$$x = a\,\frac{y}{y+1}\;; \quad y = b\,\frac{x}{x+1}$$
sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G48. Fie $A \subset (0, \infty)$ o mulţime care conţine $\dfrac{2002}{2003}$ şi având proprietatea că, dacă $\dfrac{a}{b} \in A$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\dfrac{a+1}{b} \in A$ şi $\dfrac{a}{2b} \in A$. Să se arate că $A \supseteq \mathbb{Q}_+^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G49. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leq (n+2)\,m$, iar $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq \dfrac{n+4}{4}\,M^2$, unde $m = \min x_i$, $M = \max x_i$. Să se arate că exact n dintre numerele date sunt egale.

Eugen Jecan, Dej

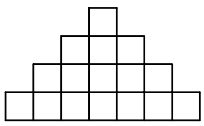
G50. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$. Să se arate că
$$\left[\sqrt{an+1}\right] = \left[\sqrt{an+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{an+a-1}\right],\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ a \in \{3, 4\}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

G51. Fie $a, b, c \in \left[\dfrac{3}{10}, \infty\right)$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că
$$\frac{2}{3} \leq a\sqrt{a+bc} + b\sqrt{b+ca} + c\sqrt{c+ab} < \frac{3}{4}\,.$$

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

G52. Se consideră o piramidă formată din pătrate 1×1, având n trepte, pe treapta k existând $2k-1$ pătrate (în figură, $n = 4$). Aflaţi numărul minim de dreptunghiuri, fiecare alcătuit numai din căsuţe întregi, în care poate fi împărţită tabla.



Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G53. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 70. Să se arate că există o mulţime de pătrate $\mathcal{P}_k = \left\{A_iB_iC_iD_i \mid A_iB_i = i,\ i = \overline{1, k}\right\}$ care să aibă suma ariilor egală cu aria pătratului dat. Putem acoperi pătratul $ABCD$ cu elementele mulţimii $\mathcal{P}_k$?

Petru Asaftei, Iaşi

G54. Să se arate că nu putem alege nici un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC de latură $l \leq 10$, care să aibă distanţele la vârfuri numere prime distincte.

Doru Buzac, Iaşi

G55. Printr-un punct situat în interiorul unui tetraedru se duc planele paralele cu feţele tatraedrului. Dacă V_1, V_2, V_3, V_4 sunt volumele tetraedrelor unic determinate de aceste plane, iar V este volumul tetraedrului dat, să se arate că

$$V \leq 16\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right).$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

B. Nivel liceal

L46. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$ se intersectează într-un punct situat pe latura $[CD]$. Să se arate că $CD = AD + BC$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

L47. Dacă un triunghi are pătratele laturilor în progresie aritmetică, atunci simetricul centrului de greutate faţă de latura mijlocie se află pe cercul circumscris triunghiului.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

L48. Fie R, r, R_1 raza cercului circumscris $\triangle ABC$, raza cercului înscris $\triangle ABC$, respectiv raza cercului circumscris $\triangle DEF$ determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale $\triangle ABC$. Să se arate că $R/2 \geq R_1 \geq r$.

Marian Tetiva, Bârlad

L49. Într-un pătrat 10×10 se înscriu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ în aşa fel încât oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine. Demonstraţi că există o linie sau o coloană ce conţine măcar două pătrate perfecte.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L50. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică având $a_1 = 5$, $r = 2002$. Pentru un element b al progresiei, să se arate că b^m aparţine progresiei dacă şi numai dacă $60 \mid m - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

L51. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice care comută şi pentru care $\det\left(A^2 + B^2\right) < (\det A + \det B)^2$. Să se arate că $xA + yB$ este matrice nesingulară, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

Cătălin Calistru, Iaşi

L52. Fie $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad m având rădăcinile distincte. Să se determine cardinalul mulţimii

$$E = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ a. î. } Q(A) = O_n \text{ şi } P(X) = \det(XI_n - A)\right\}.$$

Ovidiu Munteanu, Braşov

L53. Fie $n \geq 2$ şi $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu n^2 elemente, care are cel mult $n - 2$ divizori ai lui zero. Să se arate că A este corp.

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

L54. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pentru care $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$. Să se determine funcţiile continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac identitatea

$$f(x)\left[\int_0^y \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(y)\right] = f(y)\left[\int_0^x \varphi(t)\,dt - \frac{1}{a}\varphi(x)\right], \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

unde $a \neq 0$ este o constantă dată.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L55. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$; $x_n = \dfrac{a}{\ln a} - \dfrac{n}{\ln a}\, x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi