Probleme propuse

Clasele primare

P.33. Care este cel mai mare număr pe care îl spunem atunci când numărăm crescător din doi în doi, din trei în trei sau din cinci în cinci, pornind de la 1 şi fără să depăşim 100?
(*Clasa I*) **Raluca Popa, elevă, Iaşi**

P.34. Numărul merelor de pe o farfurie este cu 3 mai mare decât cel mai mare număr natural scris cu o cifră. Numărul perelor de pe aceeaşi farfurie nu depăşeşte numărul merelor, dar este mai mare decât jumătate din numărul acestora. Câte pere pot fi pe farfurie?
(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.35. Care dintre numerele 3132, 8182, 3435, 3932, 2021, 5960 este intrusul?
(*Clasa a II-a*) **Matei Luca, elev, Iaşi**

P.36. Cum putem realiza egalităţile

$$4\quad 4\quad 4\quad 4 = 28 \quad \text{şi} \quad 4\quad 4\quad 4\quad 4\quad 4\quad 4 = 28$$

înserând între cifrele 4 de mai sus semnele grafice $+$, $-$, $\times$, $:$, ( )?
(*Clasa a II-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

P.37. Suma a două numere naturale este 109. Dacă îl dublăm pe primul şi îl triplăm pe al doilea, suma devine 267. Care sunt numerele?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Galia Paraschiva, Iaşi**

P.38. Câte înmulţiri de tipul $\overline{abc} \times 9 = \overline{8d1e}$ sunt posibile?
(*Clasa a III-a*) **Sergiu Diaconu, elev, Iaşi**

P.39. Scrieţi cel mai mic număr natural de şase cifre care îndeplineşte, în acelaşi timp, condiţiile: *a*) nu are cifre care se repetă; *b*) suma cifrelor sale este 30; *c*) este mai mare decât 900000.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.40. Emilia are de rezolvat un număr de probleme. A hotărât să rezolve câte 4 probleme pe zi. Ea lucrează însă mai mult cu 2 probleme pe zi şi termină de rezolvat cu 5 zile mai devreme. Câte probleme a avut de rezolvat şi în câte zile le-a terminat?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

P.41. Ştiind că data de 1 Decembrie din anul 2001 a fost într-o zi de sâmbătă, să se afle care va fi următorul an în care ziua de 1 Decembrie se va sărbători într-o zi de duminică.
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

P.42. Dănilă Prepeleac i-a propus dracului să se întreacă la trântă, dar pentru a-l pune la încercare i-a spus că are un unchi, moş Ursilă, bătrân de 999 ani şi 52 săptămâni, şi de-l va putea trânti pe dânsul, se vor întrece apoi amândoi . Dacă $\frac{1}{4}$ din vârsta lui moş Ursilă depăşeşte cu 220 ani $\frac{5}{8}$ din vârsta nepotului, ce vârstă are Dănilă?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valerica Beldiman, Iaşi**

P.43. Primele douăsprezece numere dintr-un şir de numere sunt: 1, 2, 0, 3, 4, 1, 5, 6, 2, 7, 8, 0.

a) Scrieţi următoarele 6 numere din şir;

b) Calculaţi suma primelor 111 numere din şir.

(*Clasa a IV-a*) **Alina Stan, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.31. Să se arate că $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{7}{12}$.

Petru Asaftei, Iaşi

V.32. Determinaţi numerele prime a, b, c pentru care $5a+4b+7c=107$.

Mihai Crăciun, Paşcani

V.33. Un număr natural scris în baza 10 are suma cifrelor 603. Este posibil ca succesorul său să aibă suma cifrelor 1? Dar ca acesta să aibă suma cifrelor 3?

Matei Luca, elev, Iaşi

V.34. Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}=2^n\cdot\overline{ab}+3^n\cdot\overline{bc}+5^n\cdot\overline{ca}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Nicolae Stănică, Brăila

V.35. Se dă numărul $N=\overline{77\ldots7}$ cu 2002 cifre. Cercetaţi dacă N se poate scrie ca suma a două sau trei pătrate perfecte impare.

Tamara Culac, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.31. Fie $S=\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1\text{ cifre}}+\underbrace{\overline{a_2a_2\ldots a_2}}_{k_2\text{ cifre}}+\ldots+\underbrace{\overline{a_na_n\ldots a_n}}_{k_n\text{ cifre}}$, unde $k_1, k_2, \ldots k_n\geq 2$. Arătaţi că S se divide cu 4 dacă şi numai dacă $a_1+a_2+\ldots+a_n$ se divide cu 4.

Dumitru Gherman, Paşcani

VI.32. Aflaţi $\overline{ab}$ ştiind că $\overline{ab}=(a-b)!\cdot\left(\overline{ba}-3\right)$ (unde $0!=1$, iar $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, $\forall n\geq 1$).

Nicolae Stănică, Brăila

VI.33. Într-o urnă sunt bile albe, roşii, negre şi albastre. Numărul bilelor albe este $\frac{3}{5}$ din numărul celorlaltor bile; bilele roşii reprezintă jumătate din celelalte bile, iar bilele negre a treia parte din numărul celorlaltor bile. Dacă extragem o bilă, calculaţi probabilitatea ca aceasta să fie roşie sau albastră.

Marcel Rotaru, Bârlad

VI.34. În $\triangle ABC$, fie M mijlocul laturii $[BC]$. Dacă $d\,(M, AC)=\frac{AB}{2}$, arătaţi că $m(\widehat{A})=90°$.

N. N. Hârţan, Iaşi

VI.35. În $\triangle ABC$, $m(\widehat{A})=60°$ şi $m(\widehat{C})=45°$. Bisectoarea $[AD$ şi înălţimea $[BE]$ se intersectează în M (cu $D\in[BC]$, $E\in[AC]$). Să se arate că $\frac{AM}{EC}=\frac{2}{3}$.

Romeo Cernat, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.31. Să se rezolve ecuaţia $1+a^{2x}+b^{2x}=a^x+b^x+a^xb^x$, cu $a, b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq b$.

Dumitru Neagu, Iaşi

VII.32. Fie a şi b, c lungimile ipotenuzei şi respectiv catetelor unui triunghi dreptunghic. Să se arate că $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 10$.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

VII.33. Triunghiul ABC are unghiul A obtuz şi semiperimetrul p. Cercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ delimitează o suprafaţă comună $\mathcal{S}$. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: "Există $P \in \mathcal{S}$ astfel încât $d_1 + d_2 + d_3 = p$", unde d_i sunt distanţele de la P la laturile triunghiului ABC.

Cătălin Calistru, Iaşi

VII.34. Fie ABC un triunghi, iar I un punct interior lui. Dacă cercurile înscrise în triunghiurile AIB, BIC şi CIA sunt congruente şi tangente două câte două, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

VII.35. Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul cercului circumscris $\triangle ABD$, iar H ortocentrul $\triangle BCD$. Să se arate că punctele A, O, H sunt coliniare.

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.31. Să se determine mulţimea $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}\right\}$

A. V. Mihai, Bucureşti

VIII.32. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^2-x+2}+\ldots+\frac{2002}{x^2-x+2002}=$ $= 2002$.

Mihaela Predescu, Piteşti

VIII.33. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $1 + f(x+y) \leq f(x) +$ $+ f(y) \leq x + y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VIII.34. Fie AB dreapta soluţiilor ecuaţiei $x - y = 5$ şi CD dreapta soluţiilor ecuaţiei $x + y = 3$, cu $A, C \in Ox$, $B, D \in Oy$. *a)* Arătaţi că $AB \perp CD$; *b)* Calculaţi aria şi perimetrul triunghiului BCD; *c)* Arătaţi că $AD \perp BC$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

VIII.35. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Determinaţi poziţiile punctelor $M \in (BB')$ şi $N \in (CC')$ pentru care perimetrul patrulaterului strâmb $AMND'$ este minim; aflaţi această valoare minimă.

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.31. Fie mulţimile $A = \left\{x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x^3 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\right\}$, $C = \left\{x^4 + x^3 + x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\right\}$. $D = \left\{2x^4 \,|\, x \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi $A \cap C$, $B \cap D$, $A \cap D$, $A \cap B$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

IX.32. Fie $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funcţii care păstrează semnul variabilei. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + f_1(x_1) + g_1(x_1) = x_2 \\ x_2 + f_2(x_2) + g_2(x_1 + x_2) = x_3 \\ \ldots \\ x_n + f_n(x_n) + g_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1. \end{cases}$$

Obţineţi sisteme diverse prin particularizarea funcţiilor!

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

IX.33. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $n-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{12}\right]+\left[\frac{n}{18}\right]=11\cdot\left[\frac{n}{36}\right]$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

IX.34. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Să se determine $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ ştiind că

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+\frac{n+1}{2}=2\left(x_1\sin\frac{\pi}{n+1}+x_2\sin\frac{2\pi}{n+1}+\ldots+x_n\sin\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Vladimir Martinuşi, Iaşi

IX.35. Arătaţi că $\sin(\cos x)+\sin(\cos y)<2\cos\frac{x+y}{2}$, $\forall x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

Clasa a X-a

X.31. Considerăm şirurile $(F_n)_{n\geq 0}$, $(L_n)_{n\geq 0}$ definite prin $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $\forall n\geq 0$, respectiv $L_0=2$, $L_1=1$, $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$, $\forall n\geq 0$. Să se arate că $\sqrt{\sum_{k=1}^n L_k^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^n F_{k-1}^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n F_{k+1}^2}$.

Mihail Bencze, Braşov

X.32. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi pozitive. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se notează cu $\mathcal{P}_n$ graficul funcţiei $f_n(x)=a_nx^2+a_{n+1}x+a_{n+2}$. Determinaţi legea de definire a şirului ştiind că parabolele $\mathcal{P}_n$ au vârfurile pe axa Ox.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

X.33. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$, unde $a\in(1,\infty)$, $b\in(0,1)$, $ab\neq 1$. Să se arate că există o infinitate de paralelograme cu vârfurile pe reuniunea graficelor celor două funcţii.

Petru Asaftei, Iaşi

X.34. Să se arate că ecuaţiile $4\cdot 9^x+(4x-45)\cdot 3^x+11-x=0$ şi $4\cdot 18^x-$ $-3\cdot 6^x-128\cdot 3^x+2^x+32=0$ sunt echivalente.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

X.35. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}^*$ de module egale astfel încât $\frac{z_k}{z_t}\in\mathbb{C}\setminus\{\pm 1,\pm i\}$ $\forall\, 1\leq k\neq t\leq n$. Notăm $a_j=\frac{1}{z_j}\prod_{k\neq j}z_k+z_j^2$, $\forall j=\overline{1,n}$. Arătaţi că dacă două dintre numerele a_j sunt reale, atunci toate sunt reale. În plus, dacă $n\neq 4$, atunci $\prod_{k=1}^n z_k=1$ (în legătură cu problema X.86 din R.M.T. nr. 3-4/2000).

Daniel Jinga, Piteşti

Clasa a XI-a

XI.31. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Dacă $\det A\neq\det B$, demonstraţi că $\det(A+\pi B)\neq$ $\neq\det(B+\pi A)$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

XI.32. Fie $s_n=\sum_{k=1}^n\left[\left(k^2+k+1\right)\sum_{p=0}^k(-1)^pC_k^p(k-p)^k\right]$. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}\right).$$

Ştefan Alexe, Piteşti

XI.33. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că există $p \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$ astfel încât $x_n = a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + \ldots + a_p x_{n+p}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 0$.

Marian Tetiva, Bârlad

XI.34. Fie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ şi b un număr între $-\sqrt{2}\ln a$ şi $\sqrt{2}\ln a$. Stabiliţi semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) - bx$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.35. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ progresii geometrice astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. Dacă $f(a_1 a_2 \cdots a_n) < 1$ şi $f(b_1 b_2 \cdots b_n) > 1$, arătaţi că există $(c_k)_{k=1}^n$ progresie geometrică, $c_k \in (a_k, b_k)$ astfel încât $f(c_1 c_2 \cdots c_n) = 1$.

Doru - Dumitru Buzac, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.31. Fie $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_2\right\}$. Determinaţi toate subgrupurile lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ conţinute în M.

Angela Ţigăeru şi Cătălin Ţigăeru, Suceava

XII.32. Fie $(G, \cdot)$ grup, iar $a \in G \setminus \{e\}$ fixat. Arătaţi că numărul morfismelor surjective de la G la $(\mathbb{Z}_3, +)$ cu proprietatea că $f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$ este egal cu numărul subgrupurilor H ale lui G care nu-l conţin pe a şi care au proprietatea că $x^3 \in H$, $\forall x \in G$.

Dana Stan, elevă, Iaşi

XII.33. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă al cărei grafic are un centru de simetrie ce nu aparţine graficului. Arătaţi că f nu admite primitive.

Oana Marangoci, elevă, Paşcani

XII.34. Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcţie care admite primitive şi fie F o primitivă a sa cu $F(1) = 0$. Arătaţi că există $c \in (0,1)$ astfel încât $F(c) > -\dfrac{c}{2} e^{c^2} f(c)$.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

XII.35. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este o funcţie injectivă şi $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} \times [f(x)]^{2k+1} + \sin f(x)$, cu $a_1 \in [1,\infty)$ şi $a_{2k+1} \in (0,\infty)$, $\forall k = \overline{1,n}$. Arătaţi că f admite primitive dacă şi numai dacă g admite primitive.

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G21. Să se afle restul împărţirii prin 43 a numărului 6^{2002^n}, $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi

G22. Să se arate că între n şi $n!$ există cel puţin un număr prim, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

***

G23. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^2 + 10x + y! = 2002$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G24. Aflaţi câte numere de 4 cifre au proprietatea că cifrele citite de la stânga spre dreapta sunt invers proporţionale cu cifrele citite de la dreapta spre stânga. Aceeaşi problemă pentru numerele de 3, respectiv 5 cifre.

Gabriel Popa, Iaşi

G25. Să se arate că pentru orice $x, y, x \in \mathbb{R}$, există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq \frac{3}{4}$. Generalizare.

Vladimir Martinuşi, Iaşi

G26. Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt numere raţionale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

G27. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care $2^n - 1$ este divizibil cu 125.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G28. Să se arate că ecuaţia $x^4 - (a+b)\,x^3 + (a+b+ab-2)\,x^2 - \left(a^2+b^2-a-b\right)x + (a-1)(b-1) = 0$ are cel puţin două soluţii reale pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Marian Teler, Costeşti (Argeş)

G29. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) < m(\widehat{C})$. Pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B}$ luăm un punct E astfel încât $\widehat{EAB} \equiv \widehat{ACB}$. Se prelungeşte latura $[BC]$ cu segmentul $[BD] \equiv [AB]$, B între C şi D. Să se arate că mijlocul M al segmentului $[AC]$ se află pe dreapta DE.

Constantin Chirilă, Iaşi

G30. Fie triunghiul AB_0B_1 dreptunghic în B_0 şi triunghiurile AB_iB_{i+1} cu $B_iB_{i+1} \perp AB_i$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, iar $m(\widehat{B_iAB_{i+1}}) = 30^\circ$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

a) Demonstraţi că punctele A, B_q şi B_r sunt coliniare, unde $q = 2\left(n^3 - n + 1\right)$, $r = 3^{2002} - 3^{2000} + 3^{1998} - 3^{1996} + \ldots + 3^2 - 3^0$.

b) Aflaţi aria triunghiului $AB_{2001}B_{2002}$ funcţie de $a = B_0B_1$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

G31. Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2\sqrt{2}$ cm. Fie punctele variabile $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Fie O mijlocul segmentului $[MN]$ şi P intersecţia dreptelor AO şi BC. Aflaţi perimetrul $\triangle ABC$ ştiind că aria minimă a reuniunii suprafeţelor triunghiulare $[MBP]$ şi $[NCP]$ este $\sqrt{3}$ cm^2.

Adriana Maxiniuc, Botoşani

G32. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$, M un punct pe dreapta AD, iar $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Arătaţi că $S_{CMB} \geq S_{AND}$.

Neculai Roman, Mirceaşti (Iaşi)

G33. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, fie $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$, iar M, N puncte pe (AB) respectiv (AC). Dacă $\{P\} = AD \cap MN$, demonstraţi că $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{2\cos\alpha}{AP}$ (în legătură cu C:2402 din G.M. 5-6/2001).

Mihaela Bucătaru, Iaşi

G34. În triunghiul ABC având $m(\widehat{BAC}) = 135^\circ$ se înscrie pătratul $MNPQ$ cu $M, N \in (BC)$, $P \in (CA)$ şi $Q \in (AB)$. Arătaţi că:

1° $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{b + c\sqrt{2}}{c + b\sqrt{2}}$; $\quad 2^\circ$ $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{AM}{AN}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G35. Fie $[ABCD]$ un tetraedru. În planele (ABC), (ADC), (ADB) considerăm tangentele în A la cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, ADC respectiv ADB, care intersectează dreptele BC, CD, DB în M, N respectiv P. Notăm $x = \dfrac{MB}{MC}$, $y = \dfrac{NC}{ND}$, $z = \dfrac{PD}{PA}$. Să se arate că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq 1$.

Marian Ionescu, Piteşti

B. Nivel liceal

L21. Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $a^2 + 3b^2 = 2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gheorghe Iurea, Iaşi

L22. Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr scris în baza 10. Acestui număr îi adăugăm la sfârşit 147, numărului obţinut îi adăugăm din nou la sfârşit 147 şi aşa mai departe. Arătaţi că printre numerele astfel obţinute există numere compuse.

Adrian Zanoschi, Iaşi

L23. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă principală T astfel încât pe $[0, T]$ f se anulează de un număr finit de ori şi fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale nenule. Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha x_n) \cdot f(\alpha + x_n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Paul Georgescu şi Iuliana Georgescu, Iaşi

L24. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulare cu $\det A + \det B = 0$. Există $\alpha > 0$ astfel încât $A^2B - B^2A = \alpha A$?

Cătalin Calistru, Iaşi

L25. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$, astfel încât $A^{m+1} - \alpha A^m - \alpha A + I_n = O_n$. Să se arate că $|\det A| = 1$.

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

L26. Fie $f : S_n \to S_n$ endomorfism astfel încât există $\tau \in S_n$ pentru care $(f \circ f)(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$. Arătaţi că f are un punct fix (i.e. $\exists \omega \in S_n$, $f(\omega) = \omega$).

Ovidiu Munteanu, Braşov

L27. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar, astfel încât $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$. Să se arate că $x^{k+1} = x$, $\forall x \in A$ (în legătură cu C: 1896 din G.M. nr.1/1997).

Dragoş Deliu şi Marian Tetiva, Bârlad

L28. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri ascuţitunghice. Dacă $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^2 \geq \left(\dfrac{b}{b'}\right)^2 \geq \left(\dfrac{c}{c'}\right)^2 \geq \dfrac{S}{S'}$, arătaţi că triunghiurile sunt asemenea.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

L29. Fie ABC un triunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc tangent laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ în F, respectiv E şi care intersectează latura $[BC]$ în M şi N. Fie X un punct interior triunghiului astfel încât există un cerc $\mathcal{C}_1$ tangent laturilor $[XB]$ şi $[XC]$ în Z, respectiv Y şi care taie $[BC]$ tot în M şi N. Demonstraţi că patrulaterul $EFZY$ este inscriptibil.

Neculai Roman, Mirceşti, (Iaşi)

L30. Fie ABC un triunghi echilateral, iar P un punct în planul triunghiului. Notăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele lui P faţă de BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că se poate forma un triunghi având lungimile laturilor egale cu AA_1, BB_1, CC_1.

Constantin Cocea, Iaşi

L31. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a > 1$, $a_{n+1} =$
$= a_n + \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^p}$ (în legătură cu C:1463 din G.M. nr.11/1993).

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

L32. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale care satisface condiţia $\left[\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right] = x_n$, $\forall n \geq 1$, iar $x_1 = 2$. Să se arate că există $\alpha > 1$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

L33. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fixat. Arătaţi că soluţiile continue ale ecuaţiei funcţionale

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{1\leq<i<j\leq m} f(x_i - x_j) = m\left(\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\right),\ \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m},$$

sunt funcţiile de forma $f(x) = cx^2$, cu $c \in \mathbb{R}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

L34. Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [-2,\infty) \to \mathbb{R}$ definit prin $f_0(x) =$
$= x$, $f_n(x) = \sqrt{2 + f_{n-1}(x)}$, $\forall n \geq 1$. Notăm

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f_n(x)}{2}\right)^{4^n}, & \text{dacă } x \in [-2,2] \\ \lim\limits_{n\to\infty}[3 - f_n(x)]^{4^n}, & \text{dacă } x \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Arătaţi că $f(x)$ defineşte o funcţie pe $[-2,\infty)$ şi cercetaţi dacă această funcţie admite primitive.

Ştefan Alexe, Piteşti

L35. Să se arate că există şi este unic $\alpha > 1$ astfel încât

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}dx \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha\sin x}dx = \frac{\pi^2}{64\alpha}$$

(se ştie că $0,45 < e^{-\pi/4} < 0,46$).

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

IMPORTANT

- Revista "RECREAŢII MATEMATICE" poate fi consultată pe Internet la adresa **www.RecreatiiMatematice.home.ro** .
- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@lgi.is.edu.ro** . Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.