# Probleme propuse[1]

## Clasele primare

**P.14.** Scrieţi toate scăderile de tipul $\overline{aa} - \overline{bb} = \overline{cc}$ cu rezultatul mai mare ca 50.
(*Clasa I*) **Gabriela Lozovanu, cl. a IV-a, Şc. "G. Coşbuc", Iaşi**

**P.15.** Mama împarte nouă mere la cei trei copii ai săi. Câte mere poate primi fiecare dacă unul din ei a primit mai mult de trei mere şi mai puţin de şase?
(*Clasa I*) **Maria Mursa, elevă, Şc. Normală "V. Lupu", Iaşi**

**P.16.** Suma vârstelor a trei fraţi este cinci ani. Doi dintre ei sunt gemeni, iar cel mai mare are ochii negri. Câţi ani are fiecare frate?
(*Clasa a II-a*) **Teodora-Cerasela Grigoraş, cl. a IV-a, Şc. "G. Coşbuc", Iaşi**

**P.17.** Despre numerele naturale $a$ şi $b$ ştim că: $199 < a < 203$ şi $314 < b < 317$. Să se afle toate valorile diferenţei $b - a$.
(*Clasa a II-a*) **Ştefania Atodiresei, elevă, Şc. Normală "V.Lupu", Iaşi**

**P.18.** Într-o urnă sunt patru bile albe, şase bile roşii şi zece bile galbene. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să-l extragem din urnă astfel încât printre bilele extrase să avem cel puţin câte o bilă de fiecare culoare?
(*Clasa a III-a*) **Roxana Tudorache, elevă, Şc. Normală "V.Lupu", Iaşi**

**P.19.** Ce oră arată ceasul meu acum, dacă de la ora 12 a trecut jumătate din timpul care a mai rămas până la sfârşitul zilei?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Agrici, Şc. nr. 15, Iaşi**

**P.20.** Să se determine numărul natural $A = \overline{xyzt}$ ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:

a) suma cifrelor este 20,

b) fiecare cifră este cu doi mai mare decât cea din faţa ei.

(*Clasa a III-a*) **Înv. Elena Marchitan, Lic. "G. Ibrăileanu", Iaşi**

**P.21.** În curtea bunicii sunt 81 de păsări: raţe, gâşte şi găini. Ştiind că ele pot fi grupate astfel încât la o gâscă să corespundă trei găini, iar la două gâşte, o raţă, aflaţi câte păsări de fiecare fel are bunica în curte.
(*Clasa a IV-a*) **Teodora-Cerasela Grigoraş, cl. a IV-a, Şc. "G. Coşbuc", Iaşi**

**P.22.** Lungimea unui dreptunghi reprezintă $\frac{3}{8}$ din perimetrul său. Dacă adunăm $\frac{1}{2}$ din lăţime cu lungimea, obţinem 105 cm. Aflaţi dimensiunile şi perimetrul dreptunghiului.
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Şc. "G. Coşbuc", Iaşi**

**P.23.** Dacă împărţim la patru fiecare termen al unui şir de numere, obţinem mai multe numere consecutive impare, cu suma ultimelor două, adică 96, mai mare cu 16 decât dublul sumei primelor două numere. Să se găsească al cincilea termen al şirului.
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai Agrici, Şc. nr. 15, Iaşi**

---

## Clasa a V-a

**V.21.** Arătaţi că numărul $N = 2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot 6^n$ este divizibil cu 11 pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

**Dorina Carapanu, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 01.06.2002.

**V.22.** Determinaţi mulţimea

$$A=\{n;\ n\in\mathbf{N},\ n^2+n+2=1+2+3+\ldots+2001\}.$$

**Maria Zălinescu, Iaşi**

**V.23.** Să se afle ultima cifră a numărului $S=1+2+2^2+\ldots+2^{2001}$.

**Cristiana Artenie, elevă, Iaşi**

**V.24.** Să se determine numerele $\overline{abc}$ pentru care $a+b+c=a\cdot b\cdot c$.

**Paraschiva Bîrsan, Iaşi**

**V.25.** Fie numărul $a=2001^{2001}$. Notăm cu $b$ suma cifrelor numărului $a$, apoi cu $c$ suma cifrelor numărului $b$ şi continuăm în acest mod până ajungem la un număr format cu o singură cifră. Care este acest din urmă număr?

***

## Clasa a VI-a

**VI.21.** Fie date numerele distincte $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2n+1}\in\mathbf{Z}$, $n>2$, astfel încât $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_{2n+1}|=n(n+1)$. Să se calculeze $|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2n+1}|$.

**Cristiana Artenie, elevă, Iaşi**

**VI.22.** Să se afle numerele $a,b\in\mathbf{N}$, ştiind că $5a-3b=72$ şi $(a,b)=24$.

**Mihai Gârtan, Iaşi**

**VI.23.** a) Aflaţi $a,b\in\mathbf{N}^*$ cu proprietăţile: $ab=24$ şi $[a,b]+(a,b)=14$.

b) Fie $a,b\in\mathbf{N}^*$, $a\le b$, cu proprietatea că $[a,b]+(a,b)=a+b$. Să se arate că $a\mid b$.

**Cristiana Constanda, elevă, Iaşi**

**VI. 24.** a) Fie suma $S=\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\ldots+\frac{1}{50}$. Să se arate că $\frac{6}{25}<S<\frac{4}{13}$;

b) Dacă $S=\frac{a}{b}$, cu $a,b\in\mathbf{N}^*$, $(a,b)=1$, să se arate că $b$ este număr par, iar $a$ se divide cu 89.

***

**VI.25.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel $(AB=AC)$. Notăm cu $E$ proiecţia lui $B$ pe $AC$ şi cu $F$ proiecţia lui $E$ pe $BC$. Fie $M$ mijlocul lui $BE$. Să se arate că $FM\perp AB$.

**Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi**

## Clasa a VII-a

**VII.21.** Fie $E(x)=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}\right)\cdot\frac{x(x+4)+4}{x^2-16}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{\pm2,\pm4\}$. Dacă $A=\{x\in\mathbf{Z};\ x \text{ par şi } E(x)\in\mathbf{Z}\}$ şi $B=\{x\in\mathbf{N};\ x \text{ impar şi } E(x)\in\mathbf{N}\}$, să se arate că mulţimea $\left\{\frac{x}{y};\ x\in A \text{şi } y\in B\right\}$ are un singur element.

**Dumitru-Dominic Bucescu, Iaşi**

**VII. 22.** Să se arate că numărul: $A=12+12^3+12^5+\ldots+12^{2001}$ se divide prin 1716.

**Gabriel Popa, Iaşi**

**VII.23.** Intr-un reper cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-a,a)$, $B(b,a)$, $C(0,c)$ şi $D(0,a)$ cu $a>0$, $b>0$, $c>0$. Să se compare $CA+CB+CO$ cu $DA+DB+DC+DO$.

**Maria Zălinescu, Iaşi**

**VII.24.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ are loc inegalitatea

$$(n+1)^{n-1} \leq (n!)^2 \leq (n+1)^{n-1}\left(\frac{n+2}{3}\right)^n$$

(s-a notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

**Mihály Bencze, Braşov**

**VII.25.** Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar $M \in (CD)$ un punct oarecare. Perpendiculara din $D$ pe $BM$ intersectează perpendiculara din $C$ pe $AM$ în punctul $P$. Să se arate că $PM \perp CD$.

**Constantin Cocea, Iaşi**

## Clasa a VIII-a

**VIII.21.** Dacă $f : \{0,1,2,\ldots,10\} \to \{0,1,2,\ldots,10\}$ este dată prin $f(x) = ax+b$, $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$, atunci $f(5) = 5$.

**Gheorghe Iurea, Iaşi**

**VIII.22.** Fie $a > 0$, $b > 0$. Arătaţi că

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{4a^3b} + \frac{1}{6a^2b^2} + \frac{1}{4ab^3} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{128}{3(a+b)^4}$$

**Lucian Tuţescu, Craiova**

**VIII.23.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\frac{x^2}{|x+1|} = \frac{x-4}{x+1} + \left||x|-1\right|.$$

**Mihai Crăciun, Paşcani**

**VIII.24.** Arătaţi că $\alpha \in (0,1)$, ştiind că numărul real $\alpha$ este o soluţie a ecuaţiei

$$a_1x^{2k_1+1} + a_2x^{2k_2+1} + \ldots + a_nx^{2k_n+1} = b,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in (0,\infty)$; $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > b$ (generalizare a problemei VIII.17 din nr.1/2001).

**Mihaela Negrea, Braşov**

**VIII.25.** Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi $M \in [A'C]$ cu proprietatea că $\frac{MA'}{MC} = \frac{3}{2}$. Să se determine un punct $P \in [AA']$ astfel încât $PM + PC'$ să fie minimă.

**Petru Asaftei, Iaşi**

---

## Clasa a IX-a

**IX.21.** Să se stabilească care dintre afirmaţiile următoare:
(*i*) $\left||\sin x| - |\sin y|\right| \leq |\sin(x-y)|$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$;
(*ii*) $\left||\cos x| - |\cos y|\right| \leq |\cos(x-y)|$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$;
(*iii*) $|\sin(x-y)| \leq |\sin x - \sin y|$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$;
(*iv*) $|\cos(x-y)| \leq |\cos x - \cos y|$, $\forall x,y \in \mathbf{R}$
este adevărată şi care este falsă.

**Gheorghe Costovici, Iaşi**

**IX.22.** Să se arate că măcar una dintre ecuaţiile: $ax^2+2\sqrt{3}bcx+bc(a+b+c)=0$, $bx^2+2\sqrt{3}cax+ca(a+b+c)=0$, $cx^2+2\sqrt{3}abx+ab(a+b+c)=0$, unde $a,b,c \in \mathbf{R}^*$, admite rădăcini reale.

**Mihail Bencze, Braşov**

**IX.23.** Fie $a \in \mathbf{R}$ şi o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ce satisface relaţia

$$f(f(x+y)+y) = x + f(ay),\ \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

1° Să se arate că $f$ este injectivă.

2° Să se determine funcţiile $f$ ce satisfac condiţia de mai sus.

**Dan Popescu, Suceava**

**IX.24.** a) Fie $x, y, z, t \in (-1/2, \infty)$ cu $x+y+z+t = 1$. Arătaţi că $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{16}$.

b) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(-\frac{2}{n}, \infty\right)$ cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \geq \frac{1}{n^2}$.

**Mihai Bogdan Ion, elev, Craiova**

**IX.25.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare şi punctele $A_1, B_1, C_1$ pe laturile $(BC)$, $(CA)$ şi respectiv $(AB)$. Dreptele $AA_1, BB_1$ şi $CC_1$ intersectează cercul circumscris triunghiului $ABC$ în punctele $A_2, B_2$ şi respectiv $C_2$. Să se arate că

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \geq \frac{2}{3}\frac{p^2}{Rr}.$$

**Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)**

## Clasa a X-a

**X.21.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 \in \mathbf{N}^*$ şi raţia $r = 19$. Să se cerceteze dacă, pornind de la şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ (unde $b_n$ este suma cifrelor termenului $a_n$), putem permuta termenii acestuia încât să se obţină o progresie geometrică.

**Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi**

**X.22.** Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, care satisface relaţia

$$\left|\frac{x_{m+1}x_n - x_{m+n}}{x_m x_n}\right| \leq \frac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,$$

este o progresie geometrică.

**Dan Popescu, Suceava**

**X.23.** Să se calculeze suma $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} C_n^k$.

**Alina Crăciun, Paşcani**

**X.24.** Fie ecuaţia $\dfrac{a^x}{\ln b} + \dfrac{b^x}{\ln a} = 0$, $0 < a < 1$, $b > 1$. Să se arate că:

$(i)$ ecuaţia are o singură soluţie pe $\mathbf{R}$,

$(ii)$ soluţia este negativă dacă şi numai dacă $ab > 1$.

**Petru Asaftei, Iaşi**

**X.25.** Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB = CD$ şi $BC = AD$. Notăm cu $A_1$ punctul de pe sfera circumscrisă tetraedrului, diametral opus vârfului $A$. Să se demonstreze că $A_1C \perp BD$.

**Constantin Cocea, Iaşi**

## Clasa a XI-a

**XI.21.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \ldots,\ 2x_{2000} + x_{2001} - x_1 = 0,\ 2x_{2001} + x_1 - x_2 = 0.$$

**Gabriel Popa, Iaşi**

**XI.22.** Şirul $(x_n)$ se defineşte prin relaţiile $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_{n+2} = x_{n+1}x_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se afle expresia termenului general $x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**Adrian Corduneanu, Iaşi**

**XI.23.** Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue şi neconstante astfel încât $f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Z}$.

**Constantin Cocea, Iaşi**

**XI.24.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă cu proprietatea că există $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şir divergent astfel că $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Arătaţi că $f$ nu este injectivă.

**Ovidiu Munteanu, student, Braşov**

**XI.25.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivata sa având proprietatea că $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $(f'(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent urmează că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Să se studieze monotonia funcţiei $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $g = f' \circ f'$.

**Dumitru Gherman, Paşcani**

## Clasa a XII-a

**XII.21.** Să se determine funcţiile continue şi crescătoare $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ care satisfac condiţia

$$\int_0^1 f(\sin x)\,dx + \int_0^1 f(\ln(1+x))\,dx = 1 + \int_0^1 f^2(x)\,dx,\ \forall x \in [0,1].$$

**Dumitru Gherman, Paşcani**

**XII.22.** Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ astfel că $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x,y \in [0,1]$. Să se arate că

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx - \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 \leq \frac{L^2}{12}.$$

**Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara**

**XII.23.** a) Să se arate că $\hat{x} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $\exists f \in \mathbf{Z}_n[X]$ astfel încât $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{x}) = \hat{1}$.

b) Să se arate că există $f \in \mathbf{Z}_n[X]$ astfel încât $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{x}) = \hat{1}$, $\forall \hat{x} \in \mathbf{Z}_n$, $\hat{x}$ inversabil.

***

**XII.24.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, $x,y \in G$ şi $m,n,k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x^{mn} = e$ şi $x^m y x^{-m} = y^k$, unde $e$ este elementul neutru. Să se arate că $y^{k^n - 1} = e$. (generalizare a problemei XII.15 din nr. 2/2000).

**Mihaela Negrea şi Florin Popovici, Braşov**

**XII.25.** Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $n^2 - n + 1$ elemente astfel încât $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ să fie endomorfism. Să se demonstreze că grupul $G$ este abelian.

**Ovidiu Munteanu, student, Braşov**

# Probleme pentru pregătirea concursurilor

## A. Nivel gimnazial

**G1.** Trei elevi scriu câte un număr având 2001 cifre: $A = \overline{a_{2001}a_{2000}\cdots a_2a_1}$, $B = \overline{b_{2001}b_{2000}\cdots b_2b_1}$, $C = \overline{c_{2001}c_{2000}\cdots c_2c_1}$. Să se arate că în scrierea acestor numere există trei poziţii $m$, $n$ şi $p$ astfel încât $a_m = a_n = a_p$, $b_m = b_n = b_p$ şi $c_m = c_n = c_p$.

**Gabriel Popa, Iaşi**

**G2.** Determinaţi $m \in \mathbf{N}^*$ maxim astfel încât $\frac{1}{m}(a+3)(a+5)(a+7)(a+9)$ să fie număr natural pentru orice $a$ număr natural impar.

**Gheorghe Iurea, Iaşi**

**G3.** Fie $ABC$ un triunghi cu unghiul $A$ ascuţit. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ se construiesc în exterior triunghiurile $ADB$ echilateral, respectiv $AEC$ dreptunghic cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{E}) = 60°$. Fie $M$ şi $N$ mijloacele segmentelor $[CE]$, respectiv $[BC]$.

a) Arătaţi că $DM \equiv BE$;

b) Aflaţi măsurile unghiurilor $\Delta DMN$.

**Adrian Zanoschi, Iaşi**

**G4.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare şi $A_1$, $B_1$, $C_1$ proiecţiile vârfurilor $A$, $B$ şi respectiv $C$ pe laturile opuse. Ce condiţii trebuie impuse triunghiului $ABC$ pentru ca relaţia $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ să aibă loc?

**Paraschiva Bîrsan, Iaşi**

**G5.** Fiind dat triunghiul $ABC$, să se determine mulţimea punctelor $P$ din spaţiu care satisfac condiţia $PA^2 + PB^2 = 2PC^2 + CA^2 + CB^2$.

**Dan Popescu, Suceava**

**B. <u>Nivel liceal</u>**

**L1.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ sistemul de ecuaţii:

$$x^2 + \lambda y^2 = 1,\ u^2 + \lambda v^2 = 1,\ xu - \lambda yv = 0$$

în care $x, y, u, v$ sunt necunoscute şi $\lambda > 0$ o constantă.

**Adrian Corduneanu, Iaşi**

**L2.** Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{F_k} \geq \frac{4^n}{F_{2n}},$$

unde $F_0 = F_1 = 1$ şi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

**Mihail Bencze, Braşov**

**L3.** Fie $ABC$ un triunghi ascuţitunghic, $A_1$, $B_1$ şi $C_1$ picioarele înălţimilor, $O$ centrul cercului circumscris şi $A_2$, $B_2$, $C_2$ punctele de intersecţie a dreptelor $OA$, $OB$, $OC$ cu dreptele $B_1C_1$, $C_1A_1$ şi respectiv $A_1B_1$. Să se arate că dreptele $A_1A_2$, $B_1B_2$ şi $C_1C_2$ sunt concurente.

**Constantin Cocea, Iaşi**

**L.4.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie primitivabilă astfel încât $|f(x)| \leq a < 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $F$ o primitiva a sa şi $b \in \mathbf{R}$, $b < a$. Să se arate că:

$(i)$ există o unică funcţie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât $F(x + g(x)) = x + bg(x)$, $x \in \mathbf{R}$;

$(ii)$ funcţia $g$ este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$.

**Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara şi Ioan Şerdean, Orăştie**

**L5.** Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii continue, $f$ pară şi $g$ impară. Dacă graficul lui $f$ admite asimptota orizontală $y = b \in \mathbf{R}$, calculaţi limitele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} \frac{f(x)}{1 + e^{g(x)}} dx,\ n \in \mathbf{N}^* \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} \frac{e^{x^2} \sin e^{-x^2}}{1 + e^{x^3}} dx,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

**Dumitru Gherman, Paşcani**