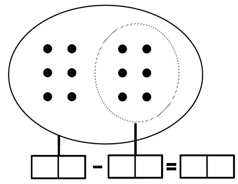
Probleme propuse[1]

Clasele primare

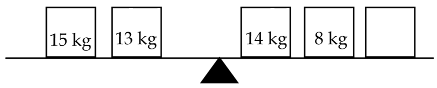


P403. Priveşte diagramele alăturate şi apoi completează casetele operaţiei indicate.
(*Clasa pregătitoare*) **Ana Năpîrlică, elevă, Iaşi**

P404. Ana vrea să cumpere o minge de 12 lei, dar are numai 9 lei. De câţi lei mai are nevoie Ana?
(*Clasa pregătitoare*) **Maria Buzincu, elevă, Iaşi**

P405. Completează casetele 3 □ 4 □ 5 □ 1 □ 2 □ 3 cu semnele plus sau minus astfel încât rezultatul final să fie zero.
(*Clasa I*) **Maria Ştefan, elevă, Iaşi**

P406. Completează caseta liberă ştiind că balanţa este în echilibru.
(*Clasa I*) **Georgiana Viţel, elevă, Iaşi**



P407. Într-un tramvai sunt 70 de călători. În prima staţie coboară 20 de călători şi urcă 10 călători. Acelaşi lucru se întâmplă şi în staţiile următoare. După câte staţii în tramvai se află 10 călători?
(*Clasa I*) **Irina Scântei, elevă, Iaşi**

P408. Împreună cu învăţătorul clasei, elevii au stabilit că se vor întâlni pentru pregătire suplimentară de trei ori pe săptămână: luni, miercuri şi vineri. De câte ori se vor întâlni elevii în lunile februarie, martie, aprilie şi mai din anul şcolar $2017-2018$ (în perioadele 5-11 februarie şi 2-10 aprilie este vacanţă)?
(*Clasa a II-a*) **Răzvan Necula, elev, Iaşi**

P409. Diferenţa dintre preţul unui nai şi preţul unui flaut este de 342 lei, iar diferenţa dintre preţul unei tobe şi preţul unui flaut este de 65 lei. Care este diferenţa dintre preţul unei tobe şi preţul unui nai?
(*Clasa a II-a*) **Mădălina Bucşă, Holboca (Iaşi)**

P410. La "Serbarea numerelor" fiecare copil dintr-o clasă cu 28 elevi, are înscris pe tricou un număr egal cu diferenţa dintre numărul elevilor şi numărul de ordine din catalog. Arătaţi că există un singur copil la care numărul de pe tricou este acelaşi cu numărul de ordine din catalog.
(*Clasa II-a*) **Victoria Ursu, elevă, Iaşi**

P411. Suma vârstelor a trei fraţi este 27 ani. Doi fraţi sunt gemeni. Cel mai mare frate poate avea 14 ani? Explicaţi răspunsul. (Se consideră ani împliniţi.)
(*Clasa a III-a*) **Liliana Popa, elevă, Iaşi**

P412. Împărţiţi tabelul de mai jos în patru părţi egale ca mărime, astfel încât suma numerelor din fiecare parte să fie aceeaşi.

[1]Se primesc soluţii până la data de 10 iunie 2018.

9	2	16	8	12	5	6	11
10	15	3	11	7	14	4	15

(*Clasa a III-a*) **Andreea Ghiorghiţă, elevă, Iaşi**

P413. Într-un coş sunt gutui, mere şi pere. În total sunt 36 fructe, iar 19 nu sunt gutui. Cele mai multe fructe sunt merele. Câte pere sunt în coş?

(*Clasa a III-a*) **Ramona Chirilă, elevă, Iaşi**

P414. Numerele naturale nenule a, b, c satisfac egalitatea $b - a = c - b$. Dacă b ia valoarea 100, care este valoarea maximă a lui c?

(*Clasa a III-a*) **Maria Pricop, elevă, Iaşi**

P415. Ce numere continuă în mod logic succesiunea de mai jos

3	6	1	8	?
5	0	7	2	?
7	2	5	0	?
1	8	3	6	?

(*Clasa a IV-a*) **Mara Ioviţe, elevă, Iaşi**

P416. Într-o sală a unui club se află n mese, de câte patru locuri fiecare, aşezate ca în figura alăturată $\square\square\square\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\square\square$. Să se afle n cuprins între 17 şi 26, ştiind că toate locurile sunt ocupate cu fete sau băieţi, iar o treime din numărul băieţilor este cu 1 mai mare decât o pătrime din numărul fetelor.

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P417. Să se afle numerele naturale consecutive a şi b, $a < b$, ştiind că $ma + nb = 2017m + 2018n$, oricare ar fi numerele naturale m şi n, nu simultan nule.

(*Clasa a IV-a*) **Corina Moraru, elevă, Iaşi**

P418. Suma numerelor utilizate pentru paginarea unei cărţi este 11628. Ştiind că prima pagină este numerotată cu 1, să se afle cu cât este numerotată ultima pagină.

(*Clasa a IV-a*) **Liliana Mîndru, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.228. Demonstraţi că fracţiile $\dfrac{13n-4}{7}$ şi $\dfrac{8n+5}{7}$, $n \in \mathbb{N}$, nu pot fi, simultan, numere naturale.

Marian Ciuperceanu, Craiova

V.229. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care $(n-2)^5 + (n-1)^4 \leq 2018 - n^3$.

Viorica Dogaru, Giurgiu

V.230. Numerele $a_1, a_2, ..., a_{2001}$ sunt astfel încât $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{2001} - a_{2000}$. Calculaţi suma tuturor numerelor, ştiind că $a_{1001} = 2001 \cdot 2018^2$.

Petre Rău, Galaţi

V.231. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $a^{\overline{bc}} = \overline{bcaa} + a$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

V.232. Arătaţi că numărul $117^{6n+1}, n \in \mathbb{N}$, se scrie atât ca sumă de două pătrate perfecte, cât şi ca diferenţă de două cuburi perfecte.

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

V.233. Este posibil ca numerele $8n+1$ şi $6n+4, n \in \mathbb{N}^*$, să fie, simultan, pătrate perfecte?

Alecu Orlando, Roşiorii de Vede

V.234. Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A = 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ este compus.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

Clasa a VI-a

VI.228. Se consideră numerele reale nenule x, y, z cu $x \neq y \neq z$. Dacă $\frac{y+x}{y-x} + \frac{y+z}{y-z} = 2$, arătaţi că $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.

Tinuţa Bejan, Iaşi

VI.229. Determinaţi numerele naturale $\overline{abcd}$, ştiind că numerele $\overline{ab}, \overline{cb}$ şi $\overline{db}$ sunt direct proporţionale cu $2, 1$ şi 6.

Bogdan Chiriac, Bacău

VI.230. Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât $\frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2}{a}$. Arătaţi că $a = b = c$.

Tatiana Cristea şi Luminiţa Mihalache, Craiova

VI.231. Determinaţi numerele naturale n pentru care $5^n - 1$ este divizibil cu $4^n - 1$.

Ionel Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

VI.232. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) - m(\widehat{B}) = 30°$. Pe latura BC se consideră punctul D astfel încât $CD = AC$. Calculaţi măsura unghiului $\widehat{BAD}$.

Dan Mitricoiu, Călăraşi

VI.233. Se consideră, în plan, punctele distincte A, B, C şi D astfel încât $CA = CB$ şi $DA = DB$. Pe segmentele AC şi BC se iau punctele E, respectiv F, cu $AE = BF$. Dacă M este mijlocul segmentului EF, demonstraţi că punctele C, D şi M sunt coliniare.

Vasile Chiriac, Bacău

VI.234. Pe o foaie de hârtie este desenat un triunghi isoscel $ABC, AB = AC$, precum şi bisectoarea unghiului $\widehat{B}$. Folosind doar un echer, determinaţi două puncte în plan care să fie egal depărtate de dreptele AB, BC şi CA.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Clasa a VII-a

VII.228. Arătaţi că numărul $A = 1\underbrace{00...0}_{n}6\underbrace{00...0}_{n-1}12\underbrace{00...0}_{n}8$ ($n \in \mathbb{N}^*$) este cub perfect.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

VII.229. Demonstraţi că numărul $N = 2017^m + 2018^n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) se poate scrie ca sumă de patru pătrate perfecte.

Gabriela Buzea, Bucureşti

VII.230. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\dfrac{a^2+2bc}{b+c} = \dfrac{b^2+2ca}{c+a} = \dfrac{c^2+2ab}{a+b}$. Arătaţi că $a = b = c$.

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

VII.231. Determinaţi numerele reale nenule x, y şi z astfel încât $x = \dfrac{y+z}{2}, y^2 = xz$ şi $\dfrac{2}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Ioan Pop, Iaşi

VII.232. Fie α, β şi γ măsurile unghiurilor triunghiului ABC. Dacă $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$, arătaţi că triunghiul ABC este ascuţitunghic.

Lucian Tuţescu, Craiova

VII.233. Pe laturie AB, BC şi CA ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P astfel încât $BM \geq MC$, $CN \geq NA$ şi $AP \geq PB$. Demonstraţi că $\mathcal{A}_{ABC} \leq 4 \cdot \mathcal{A}_{MNP}$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

VII.234. Fie GBC un triunghi. Prelungim laturile BG şi CG, dincolo de G, cu segmentele $GE = \frac{1}{2}BG$, respectiv $GF = \frac{1}{2}CG$. Arătaţi că dreptele BF şi CE sunt concurente într-un punct, notat A, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.228. Reprezentaţi, în raport cu un sistem de coordonate xOy, mulţimea $A = \left\{P(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x^2-2x}{y^2+2y} = 1\right\}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

VIII.229. Determinaţi numerele reale x cu proprietatea că $[x] \cdot \{x\} = 2018$.

Roxana Vasile şi Mircea Tereujanu, Craiova

VIII.230. Determinaţi numerele iraţionale x cu proprietatea că numerele $x^2 - 2x$ şi $x^3 - 5x$ sunt iraţionale.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

VIII.231. Arătaţi că $\dfrac{a+b}{ab+c}+\dfrac{b+c}{bc+a}+\dfrac{c+a}{ca+b}\leq 2$, $\forall a,b,c\in[2,\infty)$.

Cătălin Cristea, Craiova

VIII.232. Fie a,b,c,d numerele reale pozitive având produsul egal cu 1; atunci

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq 1.$$

Florin Rotaru, Focşani

VIII.233. Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu baza ABC triunghi echilateral, muchiile laterale de lungimi $DA=\sqrt{2}$, $DB=2$ şi $DC=\sqrt{5}$ şi având proprietatea că $\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta=\mathrm{ctg}^2\gamma$, unde α,β,γ sunt măsurile unghiurilor pe care dreptele DA,DB şi DC le formează cu planul (ABC). Ştiind că proiecţia punctului D pe planul (ABC) este un punct interior triunghiului ABC, calculaţi volumul tetraedrului $ABCD$.

Constantin Petrea, Paşcani

VIII.234. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$, având toate muchiile egale. Punctele M, N şi R sunt mijloacele segmentelor BE, AC, respectiv MN, O este centrul bazei ABC, iar Q este proiecţia punctului E pe planul (MDF). Demonstraţi că punctele E, Q, R şi O sunt coliniare.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.186. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ pentru care $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

IX.187. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $a_0=2$, $a_1=56$, $a_{n+2}=56a_{n+1}-559a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Demonstraţi că a_{2018} se divide cu 2018.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

IX.188. Pentru oricare $a,b\in(0,\infty)$ şi $t\in[0,\frac{1}{2}]$, demonstraţi că

$$(1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+t\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geq t\cdot\frac{a+b}{2}+(1-t)\sqrt{ab}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.189. Dacă x,y,z sunt numere reale pozitive cu produsul 1, arătaţi că

$$\left(\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{z^2}+\frac{z^4}{x^2}\right)^2\geq 3(x^7+y^7+z^7).$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Marius Drăgan, Bucureşti

IX.190. Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC, m(\widehat{A})=90°$ şi punctele D, E, F pe laturile BC, CA, respectiv AB astfel încât $m(\widehat{EDC})=m(\widehat{FDB})=45°$. Dacă H_1 şi H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor CDE şi BDF, arătaţi că $2H_1H_2\geq BC$.

Constantin Petrea, Paşcani

Clasa a X-a

X.186. Arătaţi că $\log_{20x^2+23x+6} 4+\log_{12x^2+25x+12} 4+\log_{15x^2+26x+8} 4 \le \log_{4x+3} 2+$ $+\log_{5x+2} 2+\log_{3x+4} 2$, $\forall x \in [0,\infty)$.

Alexandra-Valentina Irimia, elevă, Ploieşti

X.187. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, de modul 1. Demonstraţi că, în fiecare dintre următoarele două condiţii, z_1, z_2 şi z_3 reprezintă afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic:
(i) $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=z_1z_2z_3$;
(ii) $z_1+z_2+z_3=z_1z_2z_3$.

Alina Tigae şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

X.188. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $n!!!$ ca produsul tuturor numerelor naturale nenule cel mult egale cu n şi congruente modulo 3 cu n. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a, b, c, cel puţin egale cu 6, astfel încât $a!!! \cdot b!!! = c!!!$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

X.189. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal bicentric. Dacă $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=e$, $BD=f$, iar r şi R sunt razele cercului înscris, respectiv circumscris patrulaterului, demonstraţi că

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}+\frac{e^2}{f^2}+\frac{f^2}{e^2}+30 \le \frac{9R^4}{r^4}.$$

(În legătură cu problema **L290** din *RecMat1/2016.*)

Marius Olteanu, Râmnicu-Vâlcea

X.190. Cu notaţiile uzuale într-un triunghi, arătaţi că

$$AI_a+BI_b+CI_c \le \frac{R(4R+r)}{r}.$$

Marin Chirciu, Piteşti

Clasa a XI-a

XI.186. Fie $M=\left\{(A,B)\in(\mathcal{M}(\mathbb{C}))^2 | (A+B)^*=A^*+B^*\right\}$.
a) Arătaţi că mulţimea M este nevidă.
b) Dacă $(A,B)\in M$, atunci $AB^*+BA^*=O_3 \Leftrightarrow \det(A+B)=\det A+\det B$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.187. Demonstraţi că, pentru orice $x \in (0,\frac{\pi}{2}]$, au loc inegalităţile

$$\frac{4(\pi-4)}{\pi^3}x^2+\frac{4(3-\pi)}{\pi^2}x+1 \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{4(2-\pi)}{\pi^3}x^2+1.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

XI.188. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă care are exact două puncte fixe. Demonstraţi că există $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(c_1) \cdot f'(c_2) = 1$.

Cătălin Calistru, Iaşi

XI.189. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ prin: $a_2 > 0$, iar $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{na_n \ln n}$, $\forall n \geq 2$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{a_n}$.

Cezar Lupu, Pittsburgh, USA

XI.190. Considerăm şirurile $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ şi $s_n = -2\sqrt{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, având limitele e (*Euler*), respectiv s (*Ioachimescu*). Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e - e_n}{(s - s_n)^2}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Clasa a XII-a

XII.186. Determinaţi funcţia continuă $f : [a, b] \to [0, \infty)$, unde $0 < a < b$, ştiind că există o primitivă F a lui f astfel încât $f(x) = F(x) - F\left(\dfrac{ab}{x}\right)$, $\forall x \in [a, b]$.

Florin Rotaru, Focşani

XII.187. Calculaţi $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^{2018}}{e^{px} + 1} dx$, unde $p \in \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Cătălin Calistru, Iaşi

XII.188. Fie $a \in \mathbb{R}$. Calculaţi $\displaystyle\int \frac{x^2 + a(a-1)}{(x\cos x - a\sin x)^2} dx$, $x \in I$, unde I este un interval pe care numitorul nu se anulează.

Marin Chirciu, Piteşti

XII.189. Arătaţi că polinomul $f = X^5 + 2019X^2 + 2018X + 2017$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

XII.190. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel ca polinomul $f = X^{15} + aX + b(a + 2)$ să fie divizibil cu $g = X^2 + X + b$ în $\mathbb{Z}[X]$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti