XI.179. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 \geq 2$, $x_{n+1} = x_n^4 - 4x_n^2 + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notăm $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}_{3n \text{ radicali}}$ şi $b_n = \underbrace{\sqrt{-2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}}_{3n-2 \text{ radicali}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi limita şirului $c_n = 2^n(a_n + b_n - 2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Florin Stănescu, Găeşti

XI.180. Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ şirul lui Traian Lalescu, $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi limita şirului $B_n = e^{x_{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{L_{n+1}} - e^{x_n} \cdot \sqrt[n]{L_n}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Clasa a XII-a

XII.176. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi impară. Calculaţi

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{(x^2+1)(1+xe^{f(\ln x)})} dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.177. Calculaţi $\int_0^1 \ln((1+x)(1+x^9)) \cdot \frac{x^2}{1+x^3} dx$.

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

XII.178. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Demonstraţi că există $c \in (0,1)$ cu proprietatea că $\frac{1}{1+2c} < f(c) < \frac{1}{3c}$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.179. Considerăm funcţiile continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şi $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ astfel încât $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $g(x+1) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$. Arătaţi că şirul $x_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$, $n \geq 1$, este convergent şi determinaţi limita sa.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XII.180. Fie p un număr natural prim, $p \equiv 1 \pmod 5$. Arătaţi că ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G316. Se consideră a pungi numerotate $1, 2, \ldots, a$, fiecare conţinând câte b monede, $b > a$. Masele tuturor monedelor se exprimă prin numere întregi şi, cu excepţia unei pungi, toate monedele au aceeaşi masă. În acea pungă se află numai monede false, fiecare având masa cu p mai mică decât masa unei monede adevărate, unde p

nu este multiplu de $a-1$. Folosind un cântar cu afişaj, determinaţi din trei cântăriri care este numărul pungii cu monede false.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

G317. Aflaţi numerele naturale n pentru care $n! + (n+1)! + (n+3)!$ este cub perfect.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

G318. Fie x, y, z numerele reale pozitive astfel încât $xyz = x + y + z + 2$. Demonstraţi că au loc inegalităţile:

$$\sum x \geq 2\sum \frac{1}{\sqrt{xy}-1} \geq 6\sum \frac{1}{xy-\sqrt{xy}+1} \geq 6.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G319. Dacă $a, b, c \in (0,1)$, demonstraţi că

$$\sum \frac{(a+b)^2}{2} > 3(\sum a^2) - 2(\sum ab) + 3(\sum a).$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G320. a) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că $0 \leq \frac{|a-b|}{a+b} + \frac{|b-c|}{b+a} + \frac{|c-a|}{c+a} < 2$.

b) Pentru orice $t \in [0,2)$, există un triunghi ale cărui laturi a, b, c au proprietatea că $0 \leq \frac{|a-b|}{a+b} + \frac{|b-c|}{b+c} + \frac{|c-a|}{c+a} \leq t$.

Constantin Dragomir, Piteşti

G321. În interiorul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, $AB = AC$, se consideră punctul M astfel încât $m(\widehat{MCA}) = 15°$. Dacă Q este proiecţia lui A pe MC şi $\frac{AQ}{MC} = \frac{1}{2}$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{MBC}$.

Mihai Berindeanu, Bucureşti

G322. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$, iar P este simetricul lui O faţă de mijlocul segmentului AD. Demonstraţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă aria patrulaterului $APDO$ este media armonică a ariilor triunghiurilor ABD, ABC, ACD şi BCD.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G323. Fie ABC un triunghi oarecare, D, E, F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB şi M, N, P proiecţiile centrului de greutate pe laturile BC, CA respectiv AB. Dacă $\triangle MNP \sim \triangle DEF$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G324. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu $CD = AD + BC$. Demonstraţi că bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$ se intersectează într-un punct situat pe latura CD.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G325. Se consideră tetraedrul $ABCD$ şi punctele M, N, P şi Q pe segmentele AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QD}{QA} = k > 1$. Fie $\{X\} = AC \cap MN$, $\{Y\} = BD \cap NP$, $\{Z\} = AC \cap PQ$ şi $\{T\} = BD \cap MQ$.

a) Arătaţi că tetraedrele $ABCD$ şi $XYZT$ au acelaşi centru de greutate.

b) Demonstraţi că $\dfrac{\mathcal{V}_{XYZT}}{\mathcal{V}_{ABCD}} = \left(\dfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

B. Nivel liceal

L316. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\widehat{A}) = 90°$ şi punctele P, Q pe cateta AC, P între A şi Q, astfel încât $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{C}) \leq 30°$.

a) Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului BCP este simetricul punctului Q faţă de BC.

b) Determinaţi valoarea maximă a produsului $PA \cdot QA$ şi deduceţi că $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha \leq \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Mihail Frăsilă şi Constantin Petrea, Paşcani

L317. Fie O, H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Considerăm punctul D pe latura AB şi punctul E pe latura AC astfel încât A este centrul cercului exînscris triunghiului ODE. Demonstraţi că DE este mediatoarea segmentului AH.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L318. Fie ABC un triunghi dreptunghic înscris în cercul $\mathcal{C}$ de rază R şi D piciorul înălţimii din vârful unghiului drept A. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 şi O_2 tangente interior cercului $\mathcal{C}$ mai sunt tangente şi semidreptelor $[AB$ şi $[AD$ şi respectiv $[AC$ şi $[AD$. Arătaţi că aria$(\triangle AO_1O_2) = \dfrac{8Rr^2}{2R+r}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Neculai Roman, Milceşti (Iaşi)

L319. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu O_1, O_2 şi O_3 centrele cercurilor circumscrise tringhiurilor BIC, CIA respectiv AIB. Demonstraţi că

$$\frac{1}{AB \cdot O_3O_1} + \frac{1}{BC \cdot O_1O_2} + \frac{1}{CA \cdot O_2O_3} \geq \frac{1}{AB \cdot BC} + \frac{1}{BC \cdot CA} + \frac{1}{CA \cdot AB}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

L320. Într-un plan se dau două puncte B şi C şi o dreaptă Δ paralelă cu BC. Un punct A este mobil pe Δ. Să se detemrine locul geometric al circumcentrului triunghiului median al triunghiului ABC.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L321. Notăm cu $[x]$ şi $\{x\}$ partea întreagă respectiv partea fracţionară ale numărului real x. Demonstraţi că, pentru orice număr real pozitiv x, are loc inegalitatea

$$\frac{[x]^2}{7[x]^2+(2\{x\}+[x])^2}+\frac{\{x\}^2}{7\{x\}^2+(2[x]+\{x\})^2}\leq\frac{11}{72}.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

L322. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ cu $a+b+c=\sqrt{3}$. Demonstraţi că

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\leq\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Generalizare!

Tidor Pricope, elev, Botoşani

L323. Demonstraţi că, pentru oricare numere a,b,c din intervalul $(-1,1)$, are loc inegalitatea

$$(1-abc)^3(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\leq(1-a^2b)(1-ab^2)(1-a^2c)(1-ac^2)(1-b^2c)(1-bc^2).$$

Marian Tetiva, Bârlad

L324. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, demonstraţi inegalităţile:

a) $\sum\frac{2a^2}{b+c}\geq 3\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$;

b) $\sum\frac{a^3}{b^2+c^2}\geq\frac{3}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

L325. Dacă $x,y,z\in(0,\infty)$, demonstraţi că

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z}.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G316. A number of a bags, numbered $1,2,\ldots,a$, are considered, such that each of them contains b coins, $b>a$. The masses of all the b coins in each bag are expressed by integer numbers and − except one bag − all the coins [coin bags] have the same mass. That bag contains false coins only, each coin having its mass less by p than the mass of a true coin, such that p is not a multiple of $a-1$. Using a scale with digital display, determine the number of the bag with false coins by three weighings only.

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

G317. Find the natural numbers n such that $n!+(n+1)!+(n+3)!$ is a perfect cube.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

G318. Let x, y, z be positive real numbers such that $x\,y\,z=x+y+z+2$. Prove that the following inequalities hold:

$$\sum x \geq 2\sum \frac{1}{\sqrt{x\,y}-1} \geq 6\sum \frac{1}{x\,y-\sqrt{x\,y}+1} \geq 6.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G319. If $a,b,c\in(0,1)$, prove that

$$\sum \frac{(a+b)^2}{2} > 3(\sum a^2)-2(\sum a\,b)+3(\sum a).$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G320. a) If a,b,c are the side lengths of a triangle, show that
$0\leq \dfrac{|a-b|}{a+b}+\dfrac{|b-c|}{b+a}+\dfrac{|c-a|}{c+a}<2.$

b) For any $t\in[0,2)$, there exists a triangle whose sides a,b,c have the property that $0\leq \dfrac{|a-b|}{a+b}+\dfrac{|b-c|}{b+c}+\dfrac{|c-a|}{c+a}\leq t.$

Constantin Dragomir, Piteşti

G321. It is considered, in the interior of the right-angled isosceles triangle ABC, $AB=AC$, the point M such that $m(\widehat{MCA})=15^\circ$. If Q is the projection of A on MC and $\dfrac{AQ}{MC}=\dfrac{1}{2}$, determine the measure of the angle $\widehat{MBC}$.

Mihai Berindeanu, Bucureşti

G322. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, $\{O\}=AC\cap BD$, and is the symmetric of O with respect to the midpoint of the segment AD. Prove that $AB\|CD$ if and only if the area of the quadrilateral $APDO$ is the harmonic mean of the areas of triangles ABD, ABC, ACD and BCD.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G323. Let ABC be an arbitrary triangle, D, E, F the midpoints of the sides BC,CA and AB respectively and let M, N, P be the projections of the gravity center on the sides BC,CA and AB respectively. If $\triangle MNP\sim\triangle DEF$, show that the triangle ABC is equilateral.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G324. Let $ABCD$ be an inscribable quadrilateral with $CD=AD+BC$. Prove that the interior angle bisectors of angles $\widehat{A}$ and $\widehat{B}$ intersect each other at a point situated on the side CD.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G325. It is considered the tetrahedron $ABCD$ and the points M,N,P and Q on the segments AB,BC,CD and AD respectively such that $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{PC}{PD}=$

$\dfrac{QD}{QA} = k > 1$. Let $\{X\} = AC \cap MN$, $\{Y\} = BD \cap NP$, $\{Z\} = AC \cap PQ$ and $\{T\} = BD \cap MQ$.

a) Show that the tetrahedrons $ABCD$ and $XYZT$ share the same gravity center.

b) Prove that $\dfrac{\mathcal{V}_{XYZT}}{\mathcal{V}_{ABCD}} = \left(\dfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

B. Highschool Level

L316. Let ABC be a right-angled triangle with $m(\widehat{A}) = 90°$ and the points P, Q situated on the smaller side AC, with P between A and Q, such that $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{C}) \leq 30°$.

a) Show that the centre of the circumcircle of the triangle BCP is the symmetric of point Q with respect to BC.

b) Determine the maximum value of the product $PA \cdot QA$ and deduce that $\tan\alpha \cdot \cot 2\alpha \leq \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Mihail Frăsilă şi Constantin Petrea, Paşcani

L317. Let O, H be the center of the circumcircle and the orthocenter of the acute-angled triangle ABC. Let us consider the point D on the side AB and point E on the side AC such that A is the centre of the escribed circle to the triangle ODE. Prove that DE is the mid-perpendicular of the line segment AH.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L318. Let ABC be a right-angled triangle inscribed in the circle $\mathcal{C}$ of radius R and D the foot of the altitude from the vertex of the right angle $\widehat{A}$. The circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ of centres O_1 and O_2, that are inner-tangent to the circle $\mathcal{C}$ are also tangent to the half-lines $[AB$ & $[AD$, and $[AC$ & $[AD$ respectively. Show that the area $(\triangle AO_1O_2) = \dfrac{8Rr^2}{2R+r}$, where r is the radius of the inscribed circle (incircle) in the triangle ABC.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L319. Let I be the center of the circle inscribed in triangle ABC. We denote by O_1, O_2 and O_3 the circumcentres of the circumcircles to the triangles BIC, CIA and AIB respectively. Prove that

$$\frac{1}{AB \cdot O_3O_1} + \frac{1}{BC \cdot O_1O_2} + \frac{1}{CA \cdot O_2O_3} \geq \frac{1}{AB \cdot BC} + \frac{1}{BC \cdot CA} + \frac{1}{CA \cdot AB}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

L320. In a plane there are given two points B and C, and a straight line Δ which is parallel to BC. A point A is mobile on Δ. Determine the geometric locus of the circumcentre of the median triangle to triangle ABC.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L321. We denote by $[x]$ and $\{x\}$ the integer part and decimal part of the real number x, respectively. Prove that, for any positive real number x, the following inequality holds:

$$\frac{[x]^2}{7[x]^2+(2\{x\}+[x])^2}+\frac{\{x\}^2}{7\{x\}^2+(2[x]+\{x\})^2}\leq\frac{11}{72}.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

L322. Let $a,b,c\in(0,\infty)$ with $a+b+c=\sqrt{3}$. Prove that

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\leq\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Generalization required !

Tudor Pricope, elev, Botoşani

L323. Prove that, for any three numbers a,b,c in the interval $(-1,1)$, the following inequality holds:

$$(1-a\,b\,c)^3(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\leq(1-a^2b)(1-a\,b^2)(1-a^2c)(1-a\,c^2)(1-b^2c)(1-b\,c^2).$$

Marian Tetiva, Bârlad

L324. If $a,b,c\in(0,\infty)$, prove the inequalities

a) $\sum\frac{2a^2}{b+c}\geq 3\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$;

b) $\sum\frac{a^3}{b^2+c^2}\geq\frac{3}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

L325. If $x,y,z\in(0,\infty)$, prove that

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{x+y+z}.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta Tr. Severin şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

---