Probleme propuse[1]

Clasele primare

P371. Compară lungimea catedrei cu lăţimea uşii din clasa ta, măsurându-le cu palma.
(*Clasa pregătitoare*) **Georgiana Viţel, elevă, Iaşi**

P372. Un copil are patru bancnote de 1 leu, trei bancnote de 5 lei şi o bancnotă de 10 lei. Câte bancnote va avea copilul dacă schimbă bancnotele de 5 lei şi 10 lei în bancnote de 1 leu?
(*Clasa pregătitoare*) **Marian Chiriac, elev, Iaşi**

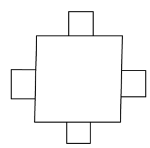
P373. Un elev a călătorit cu trenul de pe data de 4.01.2017, la amiază, până pe data de 6.01.2017, seara. Alt elev a călătorit cu autobuzul patru jumătăţi de zi şi încă două jumătăţi de oră. Care elev a călătorit mai multe ore?
(*Clasa I*) **Alexandru Chiriac, Hodora, Iaşi**

P374. Într-o clasă, şase elevi au ziua de naştere în aceeaşi săptămână, dar niciunul sâmbătă sau duminică. Arătaţi că, măcar într-o zi a săptămânii, cel puţin doi elevi îşi sărbătoresc ziua de naştere.
(*Clasa I*) **Victoria Ursu, elevă, Iaşi**

P375. Ordonaţi crescător numerele $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}, \overline{gh}$ ştiind că sunt îndeplinite condiţiile: $a > g, g = c, c > e, d < h$.
(*Clasa I*) **Beatrice Spînu, elevă, Iaşi**

P376. În câte moduri se poate achita suma de 52 lei cu bancnote de 1 leu, 5 lei şi 10 lei?
(*Clasa a II-a*) **Cătălin Petrişor, elev, Iaşi**

P377. Figura alăturată conţine un pătrat mare şi patru pătrate mici egale, aşezate la fel pe laturile pătratului mare. Câte axe de simetrie are această configuraţie geometrică?
(*Clasa a II-a*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**



P378. În câte cazuri un număr de forma $\overline{a1b}$ este mai mic decât un număr de forma $\overline{8c2}$?
(*Clasa a II-a*) **Irina Simon, elevă, Iaşi**

P379. Află perechile de numere naturale (a, b) care satisfac simultan egalităţile $a + a + a + a = b$ şi $a \cdot a = b$.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

P380. Refaceţi împărţirea alăturată, înlocuind steluţele cu cifre potrivite.
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, Iaşi**

```
1 * * *  | *
  *      | * * *
----
  1 *
    *
  ----
    * *
      *
    ----
      1
```

P381. Un elev scrie numerele de la 100 la 999 fără să le despartă prin virgulă, după cum urmează: 100101102 . . . <u>111 11</u>2 . . . 997998999. Câte secvenţe de câte cinci cifre vecine egale apar în şir? (Un exemplu de astfel de secvenţă este cea subliniată).
(*Clasa a III-a*) **Adelin Nicolae Bechet, elev, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 10 iunie 2017.

P382. Se consideră şirul de numere: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$ Aflaţi suma numerelor de pe locurile $301, 482$ şi 2017.
(*Clasa a III-a*) **Bianca Ţugui, elevă, Iaşi**

P383. Pe o tablă este scris de 13 ori numărul 22 şi de 15 ori numărul 25. Câte numere trebuie şterse pentru ca suma numerelor rămase să fie 398?
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

P384. Se consideră numărul $A = \overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc}$. Aflaţi numărul $\overline{abcd}$ ştiind că $a < b < c < d$ şi $A = 10 \cdot 11 \cdot 101$.
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, studentă, Iaşi**

P385. Dintr-o bară se taie cinci bucăţi egale cu $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$ şi $\frac{1}{64}$ din bară. Ce fracţie din bară rămâne?
(*Clasa a IV-a*) **Monica Maftei, elevă, Iaşi**

P386. Suma a şapte numere pare şi nenule este 26. Calculaţi produsul tuturor diferenţelor de câte două numere dintre cele şapte.
(*Clasa a IV-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.214. Determinaţi numerele naturale a, b şi c, ştiind că c este prim iar $a + b = a - b + c = 2017$.

Tinuţa Bejan, Iaşi

V.215. Adăugând o cifră la stânga şi o cifră la dreapta numărului 2017, obţinem un număr de şase cifre care este divizibil cu 198. Determinaţi acest număr de şase cifre.

Vlad Mihai Ciuperceanu, elev, Craiova

V.216. Adunăm un număr natural cu dublul sumei cifrelor sale. Arătaţi că numărul obţinut este divizibil cu 3.

Marian Ciuperceanu, Craiova

V.217. Există numere naturale de n cifre ($n \in \mathbb{N}^*$) $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ şi $\overline{b_1b_2\ldots b_n}$ astfel încât $\overline{a_1a_2\ldots a_n} \cdot \overline{b_1b_2\ldots b_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_n}$?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

V.218. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b cu proprietatea că $a! + b^2 = 2017^2 + 1$. (Am notat $a! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots a$.)

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

V.219. Determinaţi numerele naturale a, b şi c cu proprietatea că $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{2017}$.

Cătălin Budeanu, Iaşi

V.220. Câte numere de două cifre se scriu sub forma $\overline{ab} - a$, unde a, b sunt cifre, $a \neq 0$?

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.214. Determinaţi numerele naturale nenule a, b şi c pentru care $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = 4$.

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

VI.215. Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $9^{2^x} - 243^y = 6560$.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

VI.216. Determinaţi numerele prime p şi q astfel încât numărul $(p+9)^q$ să fie pătrat perfect.

Lucian Tuţescu şi Carmen Terheci, Craiova

VI.217. Determinaţi numerele naturale a, b, c, cel puţin egale cu 2, pentru care $\dfrac{5ab-7}{abc+2}$ este număr natural nenul.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

VI.218. Determinaţi numărul $A = m^{n+5} \cdot n^{m+4}$, $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, care are exact 63 de divizori naturali.

Ionel Tudor, Călugăreni

VI.219. Dat triunghiul ABC, notăm cu A' simetricul lui A faţă de C şi cu C' simetricul lui C faţă de B. Paralela prin B la AC intersectează dreapta $A'C'$ în M iar B' este simetricul lui B faţă de M. Demonstraţi că $BA' = B'C'$.

Valeriu Iovan, Craiova

VI.220. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) < 40°$. Ştiind că există $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$ astfel încât $AE = CF = BC$ şi $AF = FE$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{A}$.

Vasile Chiriac, Bacău

Clasa a VII-a

VII.214. Pentru $n \in \mathbb{Z}$, notăm $E(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-2016)$.

a) Demonstraţi că $E(n) \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr întreg m astfel încât $E(n) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$.

Alecu Orlando şi Mihaela Roşioru, Roşiorii de Vede

VII.215. Determinaţi numerele întregi m şi n pentru care $m^2 - 6mn + 5n^2 = 2017$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

VII.216. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu cifrele a, b, c nenule, ştiind că $\sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{\overline{bc}}$ este număr natural.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VII.217. Determinaţi cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care $13^n + n$ se divide cu 61.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VII.218. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 15$ şi $BC = 24$. Pe semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\widehat{A}$ se consideră punctul H astfel încât $AH = 7$. Arătaţi că H este ortocentrul triunghiului ABC.

Viorica Momiţă, Iaşi

VII.219. Fie M, N, P mijloacele laturilor DA, AB şi BC ale patrulaterului convex $ABCD$ iar Q un punct pe latura CD, diferit de mijlocul acesteia. Arătaţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A}_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

VII.220. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \| CD$) şi punctele $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $MN \| AB$. Arătaţi că patrulaterele $AMCN$ şi $BMDN$ sunt sau nu simultan trapeze.

Ioan Pop, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.214. a) Dacă un triunghi are aria egală cu 2, atunci cel puţin două dintre laturile sale au lungimile cel puţin egale cu 2.

b) Arătaţi că există triunghiuri care să aibă aria egală cu 2 şi exact două laturi mai mari decât 2.

Maria Rusu, Târgu Frumos

VIII.215. Fie I centrul sferei înscrisă în tetraedrul echifacial $ABCD$. O dreaptă d care trece prin I intersectează planele $(BCD), (ACD), (ABD)$ şi (ABC) în A', B', C' respectiv D'. Dacă punctul L, interior tetreaedrului, se află pe dreapta d, arătaţi că $\frac{A'L}{A'I} + \frac{B'L}{B'I} + \frac{C'L}{C'I} + \frac{D'L}{D'I} = 4$.

Constantin Petrea, Paşcani

VIII.216. Fie a, b, c, d, e numere întregi astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1001$. Demonstraţi că cel puţin unul dintre cele cinci numere este divizibil cu 7.

Roxana Vasile şi Ileana Dragomir, Craiova

VIII.217. Fie p un număr natural prim. Vom spune că numărul întreg a este *p-admisibil* dacă există $x, y \in \mathbb{Z}^*$, $x \neq y$ astfel încât $\frac{x}{y} + \frac{py}{x} = a$. Determinaţi numerele 2017-admisibile.

Dan Popescu, Suceava

VIII.218. Demonstraţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât ultimele 2017 cifre ale numărului 2017^n să fie $\underbrace{00\ldots00}_{2016 \text{ de } 0}1$.

Marian Voinea şi Laurenţiu Moldovan, Bucureşti

VIII.219. Demonstraţi că există o infinitate de perechi (x, y) de numere întregi pentru care $x^3 - 30y = 56$.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

VIII.220. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $A = 2^n + n^{18}$ să fie prim.

Dan Lucian Grigorie şi Constantina Prunaru, Craiova

Clasa a IX-a

IX.176. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\sum \frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{abc}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right).$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.177. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi $r \in \mathbb{N}^*$. Ştiind că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{1 + 2 + \ldots + k} \right)^{k+1} = a_1^2 r^{k-1}$, arătaţi că $a_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cătălin Cristea, Craiova

IX.178. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $9x^2 + 25y^2 - 6x + 30y + 1 = 0$. Arătaţi că $|3x - 5y - 4| \leq 3\sqrt{2}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

IX.179. În triunghiul ABC (cu notaţiile uzuale) are loc inegalitatea

$$a^2 \cdot r_a + b^2 \cdot r_b + c^2 \cdot r_c \geq 108r^3.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

IX.180. Presupunem că în interiorul triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) există un punct P astfel încât $m(\widehat{PBC}) = 15°$, $m(\widehat{PCB}) = 30°$ şi $PA \perp PB$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a X-a

X.176. Dacă $a, b, c, d \in (0, 1)$ sau $a, b, c, d \in (1, \infty)$, arătaţi că

$$\log_{abc} bd^2 + \log_{abd} ac^2 + \log_{bcd} ca^2 + \log_{acd} db^2 \geq 4.$$

Petru Asaftei, Iaşi

X.177. Determinaţi $z \in \mathbb{C}$, ştiind că $5z^{2017} - |z| = 4$ şi $z^{2015} + 2|z| = 3$.

Oana Preda şi Tatiana Cristea, Craiova

X.178. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x^3 - 3xy^2 = -46$ şi $y^3 - 3x^2y = -9$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

X.179. Numerele complexe x, y, z au module egale cu 1 şi $xyz = x + y + z + 2$. Arătaţi că două dintre numere sunt egale cu -1.

Marian Tetiva, Bârlad

X.180. Determinaţi $x \in (1, \infty)$ pentru care $x^{\log_3 2} + 1 = (x - 1)^{\log_2 3}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Clasa a XI-a

XI.176. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $B = A \cdot A^t$, arătaţi că $B^6 + B^4 + I_n \neq B^3 + B$.

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

XI.177. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie concavă cu proprietatea că $f(x^2 + x + 1) \leq f(x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $f(x^2 + x + 1) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.178. Fie $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termeni pozitivi astfel încât şirul $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} + \lambda_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.179. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 \geq 2$, $x_{n+1} = x_n^4 - 4x_n^2 + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notăm $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}_{3n \text{ radicali}}$ şi $b_n = \underbrace{\sqrt{-2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x_n}}}}}_{3n-2 \text{ radicali}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi limita şirului $c_n = 2^n(a_n + b_n - 2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Florin Stănescu, Găeşti

XI.180. Fie $(L_n)_{n\geq 1}$ şirul lui Traian Lalescu, $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi limita şirului $B_n = e^{x_{n+1}} \cdot \sqrt[n+1]{L_{n+1}} - e^{x_n} \cdot \sqrt[n]{L_n}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Clasa a XII-a

XII.176. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi impară. Calculaţi

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{(x^2+1)(1+xe^{f(\ln x)})} dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.177. Calculaţi $\int_0^1 \ln((1+x)(1+x^9)) \cdot \frac{x^2}{1+x^3} dx$.

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

XII.178. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Demonstraţi că există $c \in (0,1)$ cu proprietatea că $\frac{1}{1+2c} < f(c) < \frac{1}{3c}$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.179. Considerăm funcţiile continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şi $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $g(x+1) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$. Arătaţi că şirul $x_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$, $n \geq 1$, este convergent şi determinaţi limita sa.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XII.180. Fie p un număr natural prim, $p \equiv 1 \pmod 5$. Arătaţi că ecuaţia $x^2 = \widehat{5}$ are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G316. Se consideră a pungi numerotate $1, 2, \ldots, a$, fiecare conţinând câte b monede, $b > a$. Masele tuturor monedelor se exprimă prin numere întregi şi, cu excepţia unei pungi, toate monedele au aceeaşi masă. În acea pungă se află numai monede false, fiecare având masa cu p mai mică decât masa unei monede adevărate, unde p