XII.167. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$ şi $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Stelian Piscan, Giurgiu

XII.168. Pentru $n \in \mathbb{N}$, calculaţi $I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x dx$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.169. Calculaţi $\int_0^2 \frac{3-x^2}{x^4+6x^3+16x^2+18x+9}dx$.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.170. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă. Dacă $M = \sup|f'(x)|$, arătaţi că

$$|2\int_0^1 xf^2(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2| \leq \frac{M}{3}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G296. Asterix şi Obelix scriu, alternativ, numerele naturale $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ în căsuţele unui tablou 3×3, fiecare număr câte o singură dată. Asterix începe şi doreşte ca, la final, să existe o linie şi o coloană având produsele numerelor egale cu 1000; în caz contrar, câştigă Obelix. Care dintre jucători are strategie de câştig?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G297. Determinaţi toate numerele naturale m cu proprietatea că numărul m^2+6 se scrie folosind numai cifre de 2.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G298. Demonstraţi că nu există numere prime p şi q pentru care numărul $3pq-1$ să fie cub perfect.

Marian Voinea şi Florentin Vişescu, Bucureşti

G299. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $5^a \cdot 3^b = 2^c + 1$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G300. Fie a, b, c numere reale pozitive cu suma 1. Arătaţi că

$$\frac{b+c-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} \geq \frac{3}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}.$$

Tidor Pricope, elev, Botoşani

G301. Fie $n \geq 2$ număr întreg şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu produsul 1. Arătaţi că

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^n + 1) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^n.$$

Robert Antohi, elev, Iaşi

G302. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, arătaţi că $\sum \frac{a}{b^2c^2(b+c)^3} \geq \frac{32}{(\sum a^2)^3}$.

Nicuşor Zlota, Focşani

G303. Pe laturile AB, BC, AD ale paralelogramului $ABCD$ considerăm punctele M, N respectiv P astfel încât $AB = xAM$, $BC = yBN$ şi $AD = zAP$, unde x, y, z sunt numere naturale. Determinaţi x, y şi z pentru care dreptele PN, CM şi BD sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G304. Arătaţi că o piramidă $VABC$ este regulată dacă şi numai dacă sunt congruente atât muchiile VA, VB, VC cât şi medianele VA', VB', VC' ale feţelor VBC, VCA, respectiv VAB.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G305. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $CA = CB$ şi $m(\widehat{C}) = 36°$. Punctele E şi F se află pe latura BC astfel încât $BF = CE = AB$, iar punctul D este situat pe latura AC astfel încât $CD = EF$. Demonstraţi că $CD = DF$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

B. Nivel liceal

L296. Fie ABC un triunghi care nu este dreptunghic şi N, P mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Mediatoarea laturii AB intersectează dreapta AC în punctul Q, iar mediatoarea laturii AC intersectează dreapta AB în punctul R. Să se demonstreze că perpendiculara în Q pe PQ, perpendiculara în R pe NR şi simediana din A sunt concurente.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L297. În triunghiul ABC notăm cu L_a, L_b, L_c picioarele bisectoarelor şi cu S_a, S_b, S_c picioarele simedianelor ($L_a, S_a \in BC$ etc.). Ce condiţie trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca triunghiurile $L_aL_bL_c$ şi $S_aS_bS_c$ să fie înscrie în acelaşi cerc?

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L298. Fie ABC un triunghi oarecare. Un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC este tangent şi segmentelor AB, AC în punctele M, respectiv N. În mod analog definim $P \in (BC)$, $Q \in (BA)$ şi $L \in (CA)$, $K \in (CB)$. Arătaţi că $\frac{AB}{MN} + \frac{BC}{PQ} + \frac{AC}{LK} \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L299. Arătaţi că numărul 89^{89} nu poate fi suma dintre cubul şi puterea a patra a două numere naturale nenule.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

L300. Se ştie că ecuaţia $x^2 - 3y^2 = 1$ admite o infinitate de soluţii (x_n, y_n), unde n este un număr natural. Să se demonstreze că o infinitate dintre aceste soluţii au proprietatea că numărul $x_n - 1$ este pătrat perfect.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L301. Fie $a_1, \ldots, a_k$ numere întregi pozitive şi $b_1, b_2, \ldots, b_k$ numere întregi. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $(a_1 n + b_1) \cdots (a_k n + b_k)$ divide pe $n!$

Marian Tetiva, Bârlad

L302. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{7(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + yz + zx)}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin

L303. Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$24(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq$$
$$\geq 7(a + b + c)(a^2 b + ab^2 + a^2 c + ac^2 + b^2 c + bc^2 - 6abc),$$

pentru orice numere pozitive a, b, c.

Marian Tetiva, Bârlad

L304. Fie $n \geq 1$ un număr natural şi fie $E_-(n)$ şi $E_+(n)$ numărul permutărilor impare, respectiv pare $\alpha \in S_n$ cu proprietatea că $\alpha(j) \neq j$ pentru orice $1 \leq j \leq n$ şi $\alpha(j) \neq j + 1$ pentru orice $1 \leq j \leq n - 1$. Să se arate că

$$E_+(n) = E_-(n) + (-1)^{n-1}[\frac{n-1}{2}].$$

Marian Tetiva, Bârlad

L305. Să se studieze monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Adrien Reisner, Paris

Training problems for mathematical contests

A. Junior highscool level

G296. Asterix and Obelix write, alternatively, the natural numbers $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ in the cells of a table of size 3×3, each number being introduced one at a time only. Asterix starts the game and wishes to get $-$ at the end $-$ a row and a column with the products of the numbers thereof equal to 1000 ; otherwise, Obelix wins the game. Who of the two gamesters has a winning strategy ?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G297. Determine all the natural numbers m with the property that the number m^2+6 can be written using only digits equal to 2.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G298. Prove that no prime numbers p and q exist so that the number $3pq-1$ is a perfect cube.

Marian Voinea şi Florentin Vişescu, Bucureşti

G299. Solve the equation $5^a\cdot 3^b=2^c+1$ in natural numbers.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G300. Let a,b,c be positive real numbers with their sum equal to 1. Show that

$$\frac{b+c-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{c+a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{a+b-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\geq\frac{3}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}.$$

Tidor Pricope, elev, Botoşani

G301. Let $n\geq 2$ be an integer number and $a_1,a_2,\ldots,a_n$ positive real numbers with their product equal to 1. Show that

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^n+1)\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^n.$$

Robert Antohi, elev, Iaşi

G302. If $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, show that

$$\sum\frac{a}{b^2c^2(b+c)^3}\geq\frac{32}{(\sum a^2)^3}.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

G303. On the sides AB,BC,AD of the parallelogram $ABCD$ we consider the points M,N and respectively P such that $AB=x\,AM$, $BC=y\,BN$ and $AD=z\,AP$, where x,y,z are natural numbers. Determine x,y and z so that the lines PN,CM and BD are concurrent.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G304. Show that a pyramid $VABC$ is regular if and only if both the edges VA,VB,VC and the medians VA',VB',VC' of the faces VBC, VCA, respectively VAB are congruent.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G305. It is considered the isosceles triangle ABC with $CA=CB$ and $m(\widehat{C})=36°$. The points E and F lie on the side BC such that $BF=CE=AB$, and the point D lies on the side AC such that $CD=EF$. Prove that $CD=DF$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

B. Highschool level

L296. Let ABC be a not right-angled triangle and let N, P be the midpoints of the sides AC, respectively AB. The perpendicular bisector of the side AB intersects the line AC at the point Q and the perpendicular bisector of side AC intersects the line AB at the point R. It is required to prove that the perpendicular at Q on PQ, the perpendicular at R on NR and the symmedian from A are concurrent.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L297. In the triangle ABC we denote by L_a, L_b, L_c the feet of the internal angle bisectors and by S_a, S_b, S_c the feet of the symmedians ($L_a, S_a \in BC$ etc.). What condition should be satisfied by the triangle ABC so that the triangles $L_aL_bL_c$ and $S_aS_bS_c$ are inscribed in the same circle?

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L298. Let ABC be an arbitary triangle. A circle which is tangent, from inside, to the circumcircle of triangle ABC is also tangent to the segments AB, AC at the points M, respectively N. We analogously define $P \in (BC)$, $Q \in (BA)$ and $L \in (CA)$, $K \in (CB)$. Show that $\dfrac{AB}{MN} + \dfrac{BC}{PQ} + \dfrac{AC}{LK} \geq \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{p^2}{r^2}}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L299. Show that the number 89^{89} cannot be the sum of the cube and the fourth power of two non-zero natural numbers.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

L300. It is known that the equation $x^2 - 3y^2 = 1$ admits infinitely many solutions (x_n, y_n), where n is a natural number. Prove that an infinity of these solutions have the property that $x_n - 1$ is a perfect square.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L301. Let $a_1, \ldots, a_k$ be positive integer numbers and $b_1, b_2, \ldots, b_k$ be integer numbers. Show that infinitely many natural numbers n exist such that $(a_1 n + b_1) \cdots (a_k n + b_k)$ divides $n!$

Marian Tetiva, Bârlad

L302. If x, y, z are positive real numbers, show that

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \sqrt{7(x^2 + y^2 + z^2) - 4(xy + yz + zx)}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin

L303. Prove that the inequality

$$\begin{aligned} &24(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq \\ &\qquad \geq 7(a + b + c)(a^2 b + ab^2 + a^2 c + ac^2 + b^2 c + bc^2 - 6abc), \end{aligned}$$

holds for any positive numbers a, b, c.

Marian Tetiva, Bârlad

L304. Let $n \geq 1$ be a natural number, and let $E_-(n)$ and $E_+(n)$ be the numbers of the odd, respectively even permutations $\alpha \in S_n$ such that $\alpha(j) \neq j$ for any $1 \leq j \leq n$ and $\alpha(j) \neq j+1$ for any $1 \leq j \leq n-1$. Show that

$$E_+(n) = E_-(n) + (-1)^{n-1}[\frac{n-1}{2}].$$

Marian Tetiva, Bârlad

L305. Study the monotony, boundedness and convergence of the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by $u_0 \in \mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Adrien Reisner, Paris

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.