Probleme propuse[1]

P339. Încercuiţi numerele scrise în şirul $9, 7, 3, 5, 1, 2, 4, 6, 8$, care sunt după 7, înainte de 2, după 3 şi înainte de 4.
(*Clasa pregătitoare*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

P340. Completaţi şirul ◯ △ △ □ ◯ △ △ □ ◯ △__ __ __ __ __ cu încă cinci forme geometrice, respectând regula sa de formare.
(*Clasa pregătitoare*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

P341. Într-o pungă sunt trei mere roşii şi două mere galbene. Care este cel mai mic număr de mere pe care trebuie să le scoatem din pungă, fără a le vedea, pentru a fi siguri că am scos cel puţin două mere roşii?
(*Clasa I*) **Adelin Bechet, elev, Iaşi**

P342. Maria confecţionează un colier din 24 de mărgele astfel încât primele patru au culorile verde, galben, roşu şi alb, iar următoarele repetă aceste culori în aceeaşi ordine. Ce culoare are a şaptesprezecea mărgică a colierului?
(*Clasa I*) **Andrei Leahu, student, Iaşi**

P343. Scrieţi numerele $2, 3, 4, 6, 7, 8, 10$ într-un şir astfel încât suma primelor patru numere să fie egală cu suma celor rămase.
(*Clasa I*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

P344. Ştiind că $7 \times 23 + a - b = 171$ iar b nu-l depăşeşte pe 11, să se afle valoarea minimă şi valoarea maximă a lui a.
(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P345. Într-o cutie sunt 2 bile negre mici şi 17 bile albe, din care 3 sunt mici şi celelalte mari. Câte bile trebuie să extragem din cutie, fără să ne uităm la ele, astfel încât să avem cel puţin o bilă albă mică?
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Hanu, elevă, Iaşi**

P346. Scrieţi toate numerele de două cifre astfel încât diferenţa dintre cifra unităţilor şi cifra zecilor să fie cu o unitate mai mică decât cifra zecilor.
(*Clasa a II-a*) **Monica Maftei, elevă, Iaşi**

P347. Elevii clasei a III-a au plantat 39 meri, peri şi cireşi. Numărul merilor reprezintă o treime din numărul perilor, iar acesta depăşeşte cu 3 numărul cireşilor. Câţi pomi de fiecare fel au plantat elevii?
(*Clasa a III-a*) **Maria Radu, Iaşi**

P348. Fiecare dintre cele cinci căsuţe din şirul □□□□□ se completează cu numerele $0, 1$ sau 2. În câte moduri putem completa căsuţele astfel încât suma tuturor numerelor să fie 3?
(*Clasa a III-a*) **Andreea Ciobotariu, elevă, Iaşi**

P349. În urmă cu doi ani mama era de şase ori mai în vârstă decât fiica, iar peste doi ani mama va fi de patru ori mai în vârstă decât fiica. Peste câţi ani fiica va avea vârsta mamei de acum doi ani?
(*Clasa a III-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

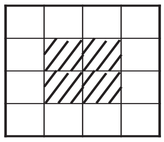
[1] Se primesc soluţii până la data de 15 iunie 2016.

P350. Paginile unei căţi sunt numerotate cu numerele de la 1 la 373. De câte ori apar trei pagini consecutive astfel încât suma numerelor scrise pe ele se împarte exact la 4?
(*Clasa a III-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P351. Aflaţi câte perechi (a, b) de numere naturale verifică egalitatea $3a + 5b = 777$.
(*Clasa a IV-a*) **Ştefan Gafton, elev, Iaşi**

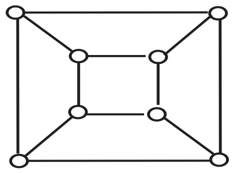
P352. Găsiţi numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care avem $\overline{ab} = a + 2 \times b + a \times b$.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

P353. În pătratul alăturat completăm cele 12 pătrăţele nehaşurate cu numerele $1, 3, 5, \ldots, 23$, fără să le repetăm. Spunem că pătratul este *elegant* dacă suma numerelor de pe fiecare linie (sau de pe fiecare coloană) este aceeaşi. Arătaţi că există cel puţin o aranjare a numerelor astfel încât pătratul să fie *elegant*.



(*Clasa a IV-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P354. Opt localităţi sunt unite prin şosele ca în figura alăturată.



a) Indicaţi un traseu care trece prin fiecare localitate o singură dată.

b) Coloraţi localităţile cu două culori astfel încât orice şosea să unească localităţi de culori diferite.
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.200 Împărţind un număr la 8, se obţine câtul 2016. Ce cât se poate obţine când împărţim acest număr la 3?

Vlad Ciuperceanu, elev, Craiova

V.201. Arătaţi că numărul $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 53 \cdot 61$ se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Ionel Tudor, Călugăreni

V.202. Determinaţi numerele naturale $\overline{xy}$ cu proprietatea că $x \cdot y \cdot \overline{xy} = \overline{yyy}$.

Viorica Dogaru, Giurgiu

V.203. Determinaţi cifrele a, b, c şi d ştiind că $\overline{dc}$ este pătrat perfect şi $2 \cdot \overline{aab} + 5 \cdot \overline{cab} + 2 \cdot \overline{cdc} + \overline{cc} = 2016$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada

V.204. Pe o masă se află 1000 de jetoane. Două persoane iau de pe masă, alternativ, de la 1 la 4 jetoane; câştigă persoana care ia de pe masă ultimul jeton. Care dintre jucători are strategie de a câştiga?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

V.205. Determinaţi două mulţimi A şi B cu proprietăţile:

(i) $A \cup B = \{1, 2, \ldots, 2016\}$;

(ii) toate elementele din B se pot exprima ca sumă de elemente distincte din A;
(iii) niciun element din A nu se poate scrie la sumă de elemente distincte din A.

Silviu Boga, Iaşi

V.206. Spunem că numărul $\overline{abcd}$ este *bun* dacă are cifre distincte şi, prin eliminarea unei cifre, se obţine un număr care se poate scrie ca suma a trei cuburi perfecte consecutive.

a) Arătaţi că numărul 2016 este bun.

b) Câte numere bune există?

Cătălin Cristea, Craiova

Clasa a VI-a

VI.200. După trei ieftiniri, fiecare cu 10%, un obiect costă 900 lei. Arătaţi că preţul iniţial al obiectului era mai mare de 1200 lei.

Constantin Dragomir, Piteşti

VI.201. Demonstraţi că $3^{2016} + 4^{2016} + 5^{2016} < 6^{2016}$.

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

VI.202. Fie $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ astfel încât $(x-2)y+2 = (y-2)\cdot z-2 = (z+2)t-2 = (t-2)x+2 = 0$. Calculaţi produsul $xyzt$.

Bogdan Chiriac, Bacău

VI.203. a) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de numere întregi (x, y, z) pentru care $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = 0$.

b) Dacă (x, y, z) are proprietatea de la a), arătaţi că $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} = 3$.

Constantin Apostul, Rm. Sărat

VI.204. Arătaţi că există o infinitate de perechi de mulţimi finite (A, B) cu $A, B \subset \mathbb{N}$, $|B| \geq 2$ şi astfel încât $2 \cdot m(A \cup B) = m(A) - m(B)$ (am notat cu $m(X)$ media aritmetică a elementelor mulţimii X).

Petru Asaftei, Iaşi

VI.205. Fie D şi F mijloacele laturilor BC respectiv AB ale triunghiului ABC, iar $E \in AC$ este ales astfel încât DE să fie bisectoarea unghiului ADC. Arătaţi că $FE \| BC$ dacă şi numai dacă unghiul $\widehat{A}$ este drept.

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

VI.206. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puncte distincte pe dreapta d astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = 1$. Demonstraţi că nu există puncte M exterioare dreptei d pentru care distanţele $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ să se exprime prin numere naturale.

Lucian Tuţescu, Craiova

Clasa a VII-a

VII.200. Determinaţi numerele întregi n pentru care $\sqrt{n^2 + 10n + 16}$ este număr raţional.

Mircea Mario Stoica, Arad

VII.201. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că numărul $A = \overline{\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ de } 4}3\underbrace{55\ldots5}_{n \text{ de } 5}6}$ este pătrat perfect.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

VII.202. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + ab + bc + ca < 0$. Arătaţi că $a^2 < b^2 + c^2$.

Constantina Prunaru şi Dan Lucian Grigore, Craiova

VII.203. Demonstraţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numărul $A = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ este strict pozitiv.

Ionel Tudor, Călugăreni

VII.204. Determinaţi numerele întregi $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ pentru care $x_1^{2016} + 7x_2^{2016} + \ldots + 7^{2015}x_{2016}^{2016} = 2016x_1x_2\ldots x_{2016}$.

Dumitru Săvulescu şi Marian Voinea, Bucureşti

VII.205. Fie E şi F mijloacele bazelor AB, respectiv CD, ale trapezului $ABCD$. Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor $\widehat{AEF}$ şi $\widehat{DFE}$ se întâlnesc într-un punct situat pe dreapta AD dacă şi numai dacă trapezul este ortogonal.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.206. Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ cu $AB < AC$. Perpendiculara din B pe AI intersectează CI în E. Paralela prin E la AC intersectează AB în D. Demonstraţi că dreapta DI trece prin mijlocul laturii BC.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VIII-a

VIII.200. Dacă r şi R sunt razele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă aceluiaşi tetraedru, demonstraţi că $\dfrac{R}{r} + \dfrac{r}{R} \geq \dfrac{10}{3}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

VIII.201. Prove that the number $2(n^4 - n^2 + 1)$ is the sum of two squares for all $n \in \mathbb{N}$.

Alessandro Ventullo, Milan, Italy

VIII.202. Spunem că o mulţime nevidă E de numere reale este *echilibrată* dacă există un număr real α cu proprietatea că, pentru orice $x \in E$, rezultă că $\alpha - x \in E$.

a) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există mulţimi echilibrate de cardinal n.

b) Daţi un exemplu de mulţime echilibrată infinită.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

VIII.203. Arătaţi că numărul $x_n = \sqrt{1^3} + \sqrt{1^2 + 2^3} + \ldots + \sqrt{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este natural, iar $24(n+1)x_n + 1$ este pătrat perfect.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

VIII.204. Determinaţi numerele $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $abc = 8$ şi $\dfrac{8+ab}{1+c} + \dfrac{8+ac}{1+b} + \dfrac{8+cb}{1+a} = 12$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

VIII.205. Arătaţi că $a_1^2 + a_2\sqrt{a_1a_2} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1 + \sqrt{a_1a_2})$, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Alina Tigae şi Carmen Terheci, Craiova

VIII.206. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{1}{8xyz} \geq 1.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc, Drobeta-Tr. Severin

Clasa a IX-a

IX.166. Determinaţi perechile $(x, y) \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $E(x, y) = (1 - \sin^2 x - \sin^2 y)(1 - \cos^2 x - \cos^2 y)$ are valoare maximă.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

IX.167. Fie p, d şi e semiperimetrul, suma diagonalelor şi lungimea segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Arătaţi că $ABCD$ este patrulater circumscriptibil dacă şi numai dacă $2p^2 = d^2 + 4e^2$.

Cătălin Calistru, Iaşi

IX.168. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $\frac{a_1}{S - a_1 + 1} + \frac{a_2}{S - a_2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n + 1} \leq 1$, unde $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Arătaţi că $\frac{1}{S - a_1 + 1} + \frac{1}{S - a_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{S - a_n + 1} \geq 1$.

Denisa Iulia Drăghia, elevă, Craiova

IX.169. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $xy + yz + zx = 1$, arătaţi că $\sqrt{\frac{1+yz}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1+zx}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{1+xy}{1+z^2}} \leq 3$.

Tidor Pricope, elev, Botoşani

IX.170. Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $a^5 = b^5 + 3b^4 + 8b^2 + 5b + 1$.

Ilinca Sebastian, Pîrşcoveni, Olt

Clasa a X-a

X.166. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, triunghiurile ABE şi ACF astfel încât $AB = AF$, $AC = AE$, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{EAF}) = 180°$ şi $\operatorname{Int}\widehat{BAC} \cap \operatorname{Int}\widehat{EAF} = \emptyset$. Arătati că $BF \perp CE$.

Florin Stănescu, Găeşti

X.167. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $m \in \mathbb{N}$, arătaţi că $\frac{x_1^{m+2} + x_2^{m+2}}{x_1x_2} + \frac{x_2^{m+2} + x_3^{m+2}}{x_2x_3} + \ldots + \frac{x_m^{m+2} + x_1^{m+2}}{x_nx_1} \geq \frac{2}{n^{m-1}}(x_1 + x_2 + \ldots + \ldots x_n)^m$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

X.168. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu propritatea că $f^{[k]}(x) + f^{[k-1]}(x) + \ldots + f^{[2]}(x) + f(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{N}$, unde k este un număr natural nenul fixat şi $f^{[i]}(x) = f(f(\ldots(x)))$.

Radu Miron, student, Iaşi

X.169. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$; demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are exact o soluţie de modul 1.

(ii) $|b\overline{c} - a\overline{b}| = \left||a|^2 - |c|^2\right| \neq 0$.

Ce se poate spune despre soluţiile ecuaţiei dacă $|b\overline{c} - a\overline{b}| = \left||a|^2 - |c|^2\right| = 0$?

Marian Tetiva, Bârlad

X.170. Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi şi $x, y, z \in (0, 1)$, arătaţi că

$$\frac{\operatorname{tg}^6 \frac{A}{2}}{x(1-x^2)} + \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{B}{2}}{y(1-y^2)} + \frac{\operatorname{tg}^6 \frac{C}{2}}{z(1-z^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Clasa a XI-a

XI.166. Calculaţi limita şirului $a_n = \dfrac{(1!)^{1!} + (2!)^{2!} + \ldots + (n!)^{n!}}{(n!)^{n!}}$.

Liviu Smarandache, Craiova

XI.167. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $(x-3)e^x + 3x + 3 = 0$;

b) $(x-3)3^x + 3x + 3 = 0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

XI.168. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = e^{x_n} + \dfrac{x_n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{x_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{nx_{n+1}}{x_n}\right)^{e^{-x_n}}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

XI.169. Calculaţi determinantul matricei $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ definită prin $a_{11} = 1$, $a_{ii} = i^2 + i - 1$, $\forall i \geq 2$ şi $a_{ij} = 2\min\{i, j\} - 1$, $\forall i \neq j$.

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

XI.170. Fie A o matrice pătratică de ordin n cu elemente numere reale pozitive, având suma elementelor egală cu n^2. Demonstraţi că există n elemente ale matricei, situate pe linii şi pe coloane diferite, al căror produs este cel mult egal cu 1.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.166. Fe $f, g \in \mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante cu proprietatea că $f(X^{2016} + X + 1) = f(X)g(X)$. Arătaţi că gradul polinomului f este par.

Dumitru Săvulescu, Bucureşti

XII.167. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$ şi $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Stelian Piscan, Giurgiu

XII.168. Pentru $n \in \mathbb{N}$, calculaţi $I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x dx$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.169. Calculaţi $\int_0^2 \frac{3-x^2}{x^4+6x^3+16x^2+18x+9} dx$.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.170. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă. Dacă $M = \sup |f'(x)|$, arătaţi că

$$|2\int_0^1 xf^2(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2| \leq \frac{M}{3}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G296. Asterix şi Obelix scriu, alternativ, numerele naturale $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ în căsuţele unui tablou 3×3, fiecare număr câte o singură dată. Asterix începe şi doreşte ca, la final, să existe o linie şi o coloană având produsele numerelor egale cu 1000; în caz contrar, câştigă Obelix. Care dintre jucători are strategie de câştig?

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G297. Determinaţi toate numerele naturale m cu proprietatea că numărul m^2+6 se scrie folosind numai cifre de 2.

Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş

G298. Demonstraţi că nu există numere prime p şi q pentru care numărul $3pq-1$ să fie cub perfect.

Marian Voinea şi Florentin Vişescu, Bucureşti

G299. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $5^a \cdot 3^b = 2^c + 1$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G300. Fie a, b, c numere reale pozitive cu suma 1. Arătaţi că

$$\frac{b+c-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{c+a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{a+b-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} \geq \frac{3}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}.$$

Tidor Pricope, elev, Botoşani