

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G276. Determinați valoarea maximă a numărului real α pentru care $\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} \geq \frac{\alpha xy(x+y)}{a+b}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, a și b .

Alexandru Blaga, Satu Mare

G277. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ (unde $n \in \mathbb{N}^*$) numere reale pozitive cu $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = 2n+1$. Arătați că $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq 1$.

Lucian Tuțescu și Teodora Rădulescu, Craiova

G278. Demonstrați că nu există numere naturale nenule n pentru care numărul $a_n = 5^n + 5^{n+1} + \dots + 5^{2n-1}$ să fie pătrat perfect.

Radu Miron, elev, Iași

G279. Determinați cel mai mare număr natural n cu proprietatea că există numere naturale a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 5(n-1)$ și $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2$.

Titu Zvonaru, Comănești

G280. Arătați că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că $n!$ se divide cu $n^3 + n^2 - 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

G281. Dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$ are lungimea $A_1A_2 = L$ și lățimea $A_2A_3 = l$, unde $L, l \in \mathbb{N}^*$, $L > l$ și L nu se divide cu l . Se construiesc dreptunghiurile $A_3A_4A_5A_6, A_5A_6A_7A_8, \dots, A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$, având aceleași dimensiuni cu dreptunghiul inițial, unde $nl > L$. Notăm cu N_1 și P_1 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lungime L din figura obținută și cu N_2 și P_2 numărul, respectiv suma perimetrelor dreptunghiurilor de lățime L .

a) Există $n \geq 4$ pentru care $N_1 = N_2$?

b) Demonstrați că $P_1 + P_2 < \frac{n(n+1)(n+5)}{6}(L+l)$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G282. Triunghiul ABC are $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{B}) = 30^\circ$. Simetricul lui A față de B este A' , punctul D este astfel încât $CD \perp BD$, $CD = AB$, iar A și D sunt separate de BC , N este mijlocul lui BC și $\{M\} = AN \cap A'D$. Demonstrați că $2AM = 5AC$.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G283. În patrulaterul convex $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, se știe că $m(\widehat{COD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{DAB}) = 110^\circ$ și $AB + CD = AC = BD$. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G284. Pe circumferința unui cerc de centru O considerăm punctele A, B, C astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ și C este mijlocul arcului mic \widehat{AB} . Pentru un punct T situat pe arcul \widehat{BC} care nu conține punctul A , fie M un punct în interiorul triunghiului TOA cu proprietatea că $m(\widehat{MAT}) = 30^\circ$ și $\widehat{OTM} = 2 \cdot \widehat{OAM}$. Să se determine locul geometric al punctului M , știind că punctul T este variabil pe arcul \widehat{BC} .

Vasile Pravăț și Titu Zvonaru, Comănești

G285. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exterior semicercuri și se notează cu K, L, M , respectiv N mijloacele acestor semicercuri. Arătați că:

- patrulaterul $KLMN$ este pătrat;
- vârfurile A, B, C, D sunt pe laturile pătratului dacă și numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.

Temistocle Bîrsan, Iași

B. Nivel liceal

L276. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în el și A' punctul în care dreapta AI reține cercul circumscris triunghiului. Să se arate că punctele de contact ale tangentelor din A și A' la cercul înscris sunt vârfurile unui dreptunghi dacă și numai dacă $2a = b + c$.

Temistocle Bîrsan, Iași

L277. Fie poligonul $A_0A_1A_2 \dots A_{n+1}$, $n \geq 1$, înscris în cercul \mathcal{C} . Notăm cu r_i razele cercurilor tangente interior cercului \mathcal{C} și segmentelor A_0A_i, A_0A_{i+1} , $i = \overline{1, n}$ și cu ρ_i razele cercurilor tangente exterior cercului \mathcal{C} și semidreptelor $(A_0A_i, (A_0A_{i+1}$, $i = \overline{1, n}$. Mai notăm cu r raza cercului tangent interior cercului \mathcal{C} și segmentelor A_0A_1, A_0A_{n+1} și cu ρ raza cercului tangent exterior cercului \mathcal{C} și semidreptelor $(A_0A_1, (A_0A_{n+1}$.

$$\text{Să se arate că } \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

Neculai Roman, Mircești, Iași

L278. Fie ABC un triunghi. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe AC în punctul P . Două izogonale duse din vârful A taie dreptele BP și CP în punctele X , respectiv Y . Dacă M este mijlocul segmentului XY , arătați că triunghiul MBC este isoscel.

Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău

L279. Mediana AM a triunghiului ABC intersectează cercul celor nouă puncte asociat triunghiului în M și N . Demonstrați că $2AN < AM$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L280. Cu notațiile uzuale într-un triunghi, arătați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, sunt adevărate inegalitățile:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} &\leq \frac{3n-4}{n} + \frac{2R}{nr}; \\ \text{b) } \sum a \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} &\leq \frac{2p(R+(n-2)r)}{nr}. \end{aligned}$$

Nicușor Zlota, Focșani și Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L281. Cu notațiile uzuale în triunghi, demonstrați că

$$\min \left\{ \frac{m_a m_b}{h_a h_b}, \frac{m_b m_c}{h_b h_c}, \frac{m_c m_a}{h_c h_a} \right\} \leq \frac{R}{2r} \leq \max \left\{ \frac{m_a m_b}{h_a h_b}, \frac{m_b m_c}{h_b h_c}, \frac{m_c m_a}{h_c h_a} \right\}.$$

Vasile Jiglău, Arad

L282. Să se arate că, pentru orice $x, y, z > 0$, are loc inegalitatea

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2.$$

Marian Cucoaneș, Măreșești

L283. Arătați că $\frac{1}{1-a^4b} + \frac{1}{1-b^4c} + \frac{1}{1-c^4d} + \frac{1}{1-d^4a} \geq \frac{1}{1-a^2bcd} + \frac{1}{1-ab^2cd} + \frac{1}{1-abc^2d} + \frac{1}{1-abcd^2}$, oricare ar fi numerele reale $a, b, c, d \in [0, 1)$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L284. Fie a, b numere reale pozitive. Arătați că sistemul de ecuații $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ are și alte soluții reale decât soluțiile evidente (a, b) și (b, a) . Există asemenea soluții cu ambele componente pozitive?

Marian Tetiva, Bârlad

L285. a) Fie $n \geq 2$ un număr natural și p cel mai mare divizor prim al lui $n(n+1)$. Fie $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \dots, n$. Să se arate că $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2}$ se divid cu p .

b) Dacă p este un număr prim și $n \equiv -1 \pmod{p^2}$, atunci $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2}, \sigma_{p-1}$ se divid cu p .

Marian Tetiva, Bârlad

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G276. Determine the maximal value of the real number α such that $\frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{b} \geq \frac{\alpha xy(x+y)}{a+b}$, for any positive real numbers x, y, a and b .

Alexandru Blaga, Satu Mare

G277. Let $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ (where $n \in \mathbb{N}^*$) be positive real numbers with $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = 2n+1$. Show that $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{x_i}{nx_i^2 + n + 1} \leq 1$.

Lucian Tuțescu și Teodora Rădulescu, Craiova

G278. Prove there are no natural nonzero numbers n so that the number $a_n = 5^n + 5^{n+1} + \dots + 5^{2n-1}$ is a perfect square.

Radu Miron, elev, Iași

G279. Determine the largest natural number n with the property that there are natural numbers a_1, a_2, \dots, a_n such that $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 5(n-1)$ and $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2$.

Titu Zvonaru, Comănești

G280. Show that there are infinitely many natural numbers n with the property that $n!$ is divisible by $n^3 + n^2 - 36$.

Marian Tetiva, Bârlad

G281. The rectangle $A_1A_2A_3A_4$ has the length $A_1A_2 = L$ and the width $A_2A_3 = l$, where $L, l \in \mathbb{N}^*$, $L > l$ and L is not divisible by l . The rectangles $A_3A_4A_5A_6, A_5A_6A_7A_8, \dots, A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$, having the same size as the initial rectangle and $nl > L$ are built. Let us denote by N_1 and P_1 the number and – respectively – the sum of the perimeters of rectangles of length L in the figure thus obtained, and by N_2 and P_2 the number and the sum of the perimeters of rectangles of width L .

a) Does it exist a number $n \geq 4$ such that $N_1 = N_2$?

b) Prove that $P_1 + P_2 < \frac{n(n+1)(n+5)}{6}(L+l)$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G282. The triangle ABC has $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ and $m(\widehat{B}) = 30^\circ$. The symmetric point of A with respect to B is A' , the point D is in such a way that $CD \perp BD$, $CD = AB$, while A and D are separated by the side BC . N is the midpoint of BC and $\{M\} = AN \cap A'D$. Prove that $2AM = 5AC$.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

G283. In the convex quadrilateral $ABCD$, with $AC \cap BD = \{O\}$, it is known that $m(\widehat{COD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{DAB}) = 110^\circ$ and $AB + CD = AC = BD$. Determine the measures of quadrilateral's angles.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G284. On the circumference of a circle of centre O one considers the points A, B, C such that $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ and C is the midpoint of the small arc \widehat{AB} . For a point T situated on the arc \widehat{BC} which does not contain the point A , let M be a point in the interior of triangle TOA with the property that $m(\widehat{MAT}) = 30^\circ$ and $\widehat{OTM} = 2 \cdot \widehat{OAM}$. Determine the geometric locus of the point M , knowing that the point T runs on the arc \widehat{BC} .

Vasile Pravăț și Titu Zvonaru, Comănești

G285. On the sides of the parallelogram $ABCD$, four half-circles are constructed and the midpoints of these half-circles are respectively denoted by K, L, M, N . Show that:

a) the quadrilateral $KLMN$ is a square;

b) the vertices A, B, C, D are situated on the sides of the square if and only if $ABCD$ is a rectangle.

Temistocle Bîrsan, Iași

B. Highschool level

L276. Let ABC be a triangle, I the incenter, and A' the point at which the line AI cuts again the circumcircle of this triangle. Show that the contact points of the tangents from A and A' to the incircle are the vertices of a rectangle if and only if $2a = b + c$.

Temistocle Bîrsan, Iași

L277. Let us consider the polygon $A_0A_1A_2 \dots A_{n+1}$, $n \geq 1$, inscribed in the circle \mathcal{C} . Denote by r_i the radii of the circles that are tangent, from the interior, to the circle \mathcal{C} and to the line segments A_0A_{i+1} , $i = \overline{1, n}$ while ρ_i 's are the radii of the exterior-tangent circles to circle \mathcal{C} and to the half-lines (A_0A_i) , (A_0A_{i+1}) , $i = \overline{1, n}$. Let us also denote by r the radius of the circle which is interior-tangent to circle \mathcal{C} and to the segments A_0A_1, A_0A_{n+1} , while $\rho =$ the radius of the exterior-tangent circle to \mathcal{C} and to the half-lines $(A_0A_1), (A_0A_{n+1})$.

Show that $\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}$.

Neculai Roman, Mircești, Iași

L278. Let ABC be a triangle. The perpendicular line at B on AB intersects the perpendicular at C on AC at the point P . Two isogonals drawn from the vertex A cut the lines BP and CP at the points X , respectively Y . If M is the midpoint of the segment XY , show that the triangle MBC is isosceles.

Titu Zvonaru, Comănești și Neculai Stanciu, Buzău

L279. The side bisector AM of the triangle ABC intersects the circle of the nine points associated to the triangle at M and N . Prove that $2AN < AM$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L280. With the usual notations in a triangle, show that – for any natural number $n \geq 2$ – the following inequalities hold:

$$\text{a) } \sum \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} \leq \frac{3n-4}{n} + \frac{2R}{nr}; \quad \text{b) } \sum a \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{-a+b+c}} \leq \frac{2p(R+(n-2)r)}{nr}.$$

Nicușor Zlota, Focșani și Corneliu Mănescu-Avram, Ploiești

L281. With the usual notations in a triangle, show that

$$\min \left\{ \frac{m_a m_b}{h_a h_b}, \frac{m_b m_c}{h_b h_c}, \frac{m_c m_a}{h_c h_a} \right\} \leq \frac{R}{2r} \leq \max \left\{ \frac{m_a m_b}{h_a h_b}, \frac{m_b m_c}{h_b h_c}, \frac{m_c m_a}{h_c h_a} \right\}.$$

Vasile Jiglău, Arad

L282. Show that, for any $x, y, z > 0$, the following inequality is true:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești

L283. Show that $\frac{1}{1-a^4b} + \frac{1}{1-b^4c} + \frac{1}{1-c^4d} + \frac{1}{1-d^4a} \geq \frac{1}{1-a^2bcd} + \frac{1}{1-ab^2cd} + \frac{1}{1-abc^2d} + \frac{1}{1-abcd^2}$, for any real numbers $a, b, c, d \in [0, 1)$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L284. Let a, b be positive real numbers. Show that the system of equations $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ also admits other solutions than the obvious solutions (a, b) and (b, a) . Do such solutions with both components being positive exist?

Marian Tetiva, Bârlad

L285. a) Let $n \geq 2$ be a natural number and p be the largest prime divisor of $n(n+1)$. Let $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ be the fundamental symmetric sums of the numbers $1, 2, \dots, n$. Prove that $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2}$ are divisible by p .

b) If p is a prime number and $n \equiv -1 \pmod{p^2}$, then $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2}, \sigma_{p-1}$ are divisible by p .

Marian Tetiva, Bârlad

Recreații ... matematice

(Răspuns la „recreațiile” de la pag. 78)

I. Pentagrama are 5 laturi și 10 vârfuri. Fiecare vârf este situat pe două laturi și pe fiecare latură se află patru vârfuri.

Arătăm, prin reducere la absurd, că numerele $1, 2, 3, \dots, 10$ nu se pot pune în vârfurile pentagramei în condițiile (i)-(ii).

Dacă acest fapt ar fi posibil, atunci suma numerelor de pe orice latură a pentagramei este 22 (suma k rezultă din ecuația $5k = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 10)$).

Apoi, numerele 1 și 10 se află, în mod necesar, pe o latură a pentagramei. Într-adevăr, în caz contrar, suma celorlalte 6 numere de pe laturile ce conțin numărul 1 poate fi cel mult $39 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4$. Pe de altă parte, această sumă este precis egală cu $(22 - 1) + (22 - 1) = 42$. Contradicție.

Notăm: l_1 - latura ce conține numerele 1 și 10; l'_1 - latura ce conține 1, dar nu și 10; l_{10} - latura ce conține 10, dar nu și 1. Constatăm că pe laturile l_1, l'_1, l_{10} se află $2 + 3 + 2 = 7$ vârfuri diferite de 1 și 10 (l'_1 și l_{10} au un vârf comun). Așadar, putem preciza care este situația vârfurilor de pe aceste trei laturi: l_1 conține 1, 10, A și B , l'_1 conține 1, C, D și E , iar l_{10} conține vârfurile 10, C, F și G (am considerat că $l'_1 \cap l_{10} = \{C\}$). Condițiile (i)-(ii) conduc la sistemul: $1 + 10 + A + B = 1 + C + D + E = 10 + C + F + G = 22$, unde $\{A, B, C, D, E, F, G\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Evident, avem un număr finit de posibilități pentru cele șapte necunoscute ale sistemului. Se constată că în fiecare dintre aceste cazuri se ajunge la o imposibilitate.

În concluzie, la Problema I, avem răspuns negativ: nu putem scrie numerele $1, 2, 3, \dots, 10$ în vârfurile pentagramei respectând condițiile (i)-(ii).

II. La Problema II răspunsul este pozitiv; o soluție este indicată în figura alăturată.

