Probleme propuse[1]

Clasele primare

P311. Scrie în casete toate numerele de la 10 la 19, o singură dată fiecare, astfel încât să obţii rezultatul dat $\square + \square = \square + \square = \square + \square = \square + \square = \square + \square = 29$.
(*Clasa I*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

P312. Scrie numerele de la 0 la 9 în grupe de câte patru astfel încât, în fiecare grupă, numerele scrise să fie în ordine descrescătoare şi vecine.
(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

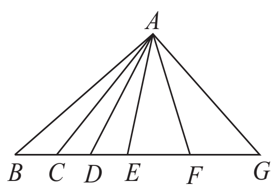
P313. Fratele meu este cu 3 ani mai mic decât mine, iar eu am 8 ani. Care va fi suma vârstelor noastre peste 2 ani?
(*Clasa I*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P314. Două numere îndeplinesc condiţiile: a) suma lor este 81 şi b) dacă din primul număr se scade 9, rezultatul va fi dublul celui de-al doilea. Aflaţi numerele.
(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

P315. Un număr de două cifre se numeşte *ordinar* dacă are suma cifrelor mai mare decât suma cifrelor vecinului său mai mic. Scrieţi toate numerele ordinare care au suma cifrelor 8.
(*Clasa a II-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

P316. Completaţi tabelul din imagine cu numerele $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ astfel încât ele să fie scrise crescător şi consecutiv pe fiecare linie şi fiecare coloană. De câte ori apare numărul 5?
(*Clasa a II-a*) **Bianca Gimiga, elevă, Iaşi**

P317. Câte triunghiuri sunt în figura alăturată?
(*Clasa a III-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**



P318. Găsiţi numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab} = b + b \times b + b \times b \times b$.
(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

P319. Să se arate că niciun număr din şirul $5, 10, 15, 20, \ldots, 100$ nu poate avea suma cifrelor egală cu 15.
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P320. Putem găsi şase numere consecutive de forma $7 \times n$ a căror sumă să fie un număr par? (Exemplu: $14, 21, 28$ sunt numere consecutive de forma $7 \times n$.)
(*Clasa a III-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

P321. Mama şi cei cinci copii ai săi au împreună 76 ani. Vârstele copiilor sunt numere pare consecutive. La naşterea celui mai mic copil, mama avea triplul vârstei celui de-al treilea copil. Aflaţi vârstele celor şase.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, Iaşi**

[1]Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2015.

P322. Numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au proprietatea că fiecare dintre ele, începând cu al doilea, este jumătatea sumei tuturor numerelor scrise înaintea lui. Aflaţi n ştiind că $x_n = 9$.

(*Clasa a IV-a*) **Doina Ivaşcu, elevă, Iaşi**

P323. Daţi un exemplu de 39 numere pare, consecutive, mai mari ca 39 şi a căror sumă se împarte exact la 4.

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Munteanu, elevă, Iaşi**

P324. Un dreptunghi format din pătrăţele având latura de 1 cm are perimetrul de 20 cm. Se completează pătrăţelele dreptunghiului respecând regulile următoare: 1) după ce se completează prima linie se trece la completarea liniei a doua ş.a.m.d; 2) 1 se scrie o singură dată, 2 de două ori, $\ldots, n$ se scrie de n ori. Să se afle n, ştiind că procedând în acest fel toate pătrăţelele au fost completate.

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.186. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $A = 7+7^2+7^3+\ldots+7^{2015}$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

V.187. Stabiliţi în câte zerouri se termină scrierea zecimală a produsului $A = 1016^2 \cdot 1017^2 \cdot \ldots \cdot 2015^2$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

V.188. Arătaţi că $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2014}{2015}\right)^2 > \frac{1}{2015}$.

Viorica Momiţă, Iaşi

V.189. Demonstraţi că nu există numere naturale nenule m, n şi k pentru care $4^{2m} + 9^{2n+1} = k^2 + k + 1$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

V.190. Arătaţi că există o infinitate de perechi $(n, n+1)$, cu $n \in \mathbb{N}$, astfel încât atât n, cât şi $n+1$ se pot scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.191. Demonstraţi că orice număr natural mai mare ca 5 se poate scrie ca suma dintre un număr prim şi un număr compus.

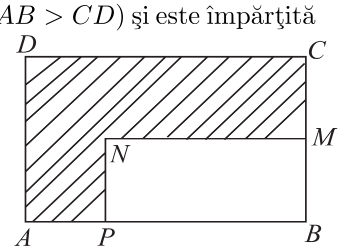
Mariana-Liliana Popescu, Suceava

V.192. Determinaţi valorile numărului natural a pentru care există numere naturale distincte x şi y astfel încât $3x + 7y = 10a$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.186. O grădină are forma dreptunghiului $ABCD$ ($AB > CD$) şi este împărţită în două parcele: dreptunghiul $MNPB$ şi ,,colţul" haşurat. Se ştie că $AP = CM$, iar partea haşurată are aria de două ori mai mare şi perimetrul cu 40 mai mare decât aria, respectiv perimetrul dreptunghiului $MNPB$. Aflaţi lungimile segmentelor AB şi CD ştiind că se exprimă, în



metri, prin numere naturale.

Gabriel Popa, Iaşi

VI.187. Determinaţi restul împărţirii numărului $N = 2015^4 \cdot 4^{2015}$ prin 9.

Viorica Dogaru, Giurgiu

VI.188. Fie p un numar natural cu proprietatea că, oricare ar fi numerele $a, b \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, produsul ab nu este divizibil cu p. Arătaţi că p este număr prim.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.189. Determinaţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 201q^2 + p$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VI.190. Considerăm a, b, c şi d cifre nenule în baza 10 (la litere diferite corespund cifre diferite) astfel încât numărul $N = \overline{abc}_{(d)} - \overline{cba}_{(d)}$ este multiplu de 63. Stabiliţi câte astfel de 4-uple (a, b, c, d) există.

Neculai Stanciu, Buzău

VI.191. Fie n un număr natural nenul. Determinaţi numărul soluţiilor întregi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ale ecuaţiei $x_1 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n + 1 = 0$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.192. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Notăm cu D simetricul lui C faţă de dreapta BI şi cu E simetricul lui B faţă de dreapta CI. Demonstraţi că $ID \| BE$ dacă şi numai dacă $IE \| CD$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VII-a

VII.186. Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că numerele $2\underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ şi $2\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\underbrace{99\ldots9}_{n}$ sunt compuse.

Titu Zvonaru, Comăneşti

VII.187. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq 12abc$.

Romeo Cernat, Iaşi

VII.188. Pe laturile AB, CD şi AD ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, respectiv P şi fie $\{E\} = BP \cap MN$, $\{F\} = CP \cap MN$. Notăm cu S, S_1, S_2, S_3 şi S_4 ariile suprafeţelor $ABCD, BME, CNF, AMEP$, respectiv $DNFP$. Demonstraţi că $S \geq 4(\sqrt{S_1 S_2} + \sqrt{S_3 S_4})$.

Mihai Haivas, Iaşi

VII.189. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3BC$ şi punctele $E, F \in (AB)$ astfel încât $AE = EF = FB$. Dacă $\{N\} = CF \cap AD$, arătaţi că $NE \perp DF$.

Cătălin Cristea, Craiova

VII.190. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB + CD = BC + AD$. Arătaţi că $AB \| CD$ dacă şi numai dacă cercurile de diametre BC, respectiv AD sunt tangente.

Ioan Săcăleanu, Hârlău, Iaşi

VII.191. Fie M mijlocul bazei mari AB a trapezului $ABCD$ şi E un punct pe diagonala AC. Notăm $\{P\} = CM \cap BE$, $\{F\} = AP \cap BC$, $\{G\} = FE \cap AD$, $\{Q\} = CG \cap DE$, $\{N\} = AQ \cap CD$. Arătaţi că N este mijlocul bazei mici CD.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

VII.192. Un dreptunghi are perimetrul de 58m. Este posibil să luăm zece puncte pe conturul dreptunghiului astfel încât distanţa dintre oricare două puncte consecutive să fie de 5m?

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.186. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara PA. Notăm cu D, M şi N proiecţiile punctului A pe BC, PB, respectiv PC. Demonstraţi că $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$ dacă şi numai dacă $\widehat{BPD} \equiv \widehat{CPD}$.

Gabriel Popa, Iaşi

VIII.187. Determinaţi numerele reale x, y şi z, ştiind că $x^4 + 27y = -3(y^3 + 27)$, $y^4 + 27z = -3(z^3 + 27)$ şi $z^4 + 27x = -3(x^3 + 27)$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.188. Dacă x şi y sunt numere reale pentru care au sens radicalii, arătaţi că $44\sqrt{x - 2y + 760} + 6\sqrt{1510 - 4x + 2y} + \sqrt{7x + 7y + 3500} \leq 2015$.

Cristian Pătraşcu şi Andrei Spătaru, elevi, Craiova

VIII.189. Dacă x, y, z sunt numere reale, arătaţi că $(3x - 2y + z)^4 + (x + 3y - 2z)^4 + (2x - y - 3z)^4 \geq \frac{16}{27}(x + y + z)^4$.

Constantin Dragomir, Piteşti

VIII.190. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [1, \infty)$, astfel încât $\sqrt{x_1 - a_1^2} + \sqrt{x_2 - a_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n - a_n^2} = \frac{x_1}{2|a_1|} + \frac{x_2}{2|a_2|} + \ldots + \frac{x_n}{2|a_n|}$. Arătaţi că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 2n$. Când se atinge egalitatea?

Cecilia Deaconescu, Piteşti

VIII.191. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $13x^2 + 14x + 1 = 9^x$.

Dan Popescu, Suceava

VIII.192. Dacă n este număr natural nenul, arătaţi că $A = 2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)$ nu poate fi cub perfect.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

Clasa a IX-a

IX.156. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, se consideră ecuaţia $x^2 + ax + b = 0$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{ax + 2b}{2x + a}$. Ştiind că ecuaţia are soluţiile reale distincte x_1 şi x_2, arătaţi că, pentru orice $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{a}{2}, x_1, x_2\right\}$, între t şi $f(t)$ se află exact una dintre soluţiile ecuaţiei.

Mihai Dicu, Craiova

IX.157. Fie a, b şi c numere reale astfel încât $a+b+c=abc$. Demonstraţi că $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$.

Andrei Nicolaescu şi Cristian Pătraşcu, elevi, Craiova

IX.158. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) \geq 60°$. Arătaţi că $\frac{2\sqrt{3}}{3}a \geq \max\{b, c\}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.159. Pe laturile AB, BC şi CA ale triungiului ABC se consideră punctele P, M, respectiv N astfel încât $3AP = 2BP$, iar cevienele AM, BN şi CP sunt concurente. Dacă raportul ariilor triunghiurilor MNP şi ABC este $\frac{6}{25}$, arătaţi că una dintre cevienele AM şi BN este mediană.

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

IX.160. Fie AB baza mare a trapezului $ABCD$, iar M, N, P şi Q mijloacele segmentelor AD, BC, AC, respectiv BD.

a) Demonstraţi că $ABCD$ este patrulater circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A+\sin B}$.

b) Arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel circumscriptibil dacă şi numai dacă $\frac{PQ}{MN}=\cos A$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

<u>Clasa a X-a</u>

X.156. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuatia $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

X.157. Fie $a, b \in (0,1)\cup(1,\infty)$, cu $ab \neq 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $a^x \log_{ab} a + b^x \log_{ab} b = a^x b^x$.

Mihai Dicu, Craiova

X.158. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ astfel încât ecuaţia $z^3+az+b=0$ să aibă trei soluţii complexe distincte şi cu acelaşi modul. Arătaţi că aceste soluţii sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.159. Dacă a, b, c, d şi e sunt numere reale pozitive, arătaţi că $\sum \frac{a^5}{bcde} \geq \sum a$.

Mihai Crăciun, Paşcani

X.160. Demonstraţi că, în orice triunghi ascuţitunghic, este adevărată inegalitatea $\cos^4\frac{A}{2}+\cos^4\frac{B}{2}+\cos^4\frac{C}{2} \geq \frac{23}{16}+\frac{r}{2R}$.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.156. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Spunem că matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt *legate* dacă $AB + BA = O_n$.

a) Arătaţi că există două matrice legate care nu comută.

b) Dacă A şi B sunt legate, demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

XI.157. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ şi $x_{n+2} + x_n \geq 2x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă şirul dat este convergent, arătaţi că $\alpha = \beta$.

Răzvan Drînceanu şi Liviu Smarandache, Craiova

XI.158. Dacă $x, y \in \mathbb{R}, x \geq 1$, arătaţi că $x^{\sin^2 y} + x^{\cos^2 y} \leq x + 1$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

XI.159. Fie $a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în 0, cu $f(0) = 0$ şi astfel încât $af(ax) + f(x) = f(a^2x) + af(a^{-1}x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $f(a^k x) = a^k \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Sven Cortel, Manchester, UK

XI.160. Fie $(x_n), (y_n)$ şi (z_n) şiruri de numere întregi definite prin relaţiile $x_{n+1} = y_n + z_n$, $y_{n+1} = x_n + z_n$ şi $z_{n+1} = x_n + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, y_1, z_1 sunt numere întregi date. Demonstraţi că există $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$ (care se pot alege într-o infinitate de moduri esenţial distincte) pentru care

$$ax_n^2 + by_n^2 + cz_n^2 + dx_ny_n + ex_nz_n + fy_nz_n = g, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.156. Determinaţi funcţiile derivabile $y = y(x)$, $x \in (0, \infty)$, cu proprietatea că $x(x+1) \cdot y'(x) + y(x) = e^x(x+1)^2$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.157. Calculaţi $I = \int \dfrac{x^2 + 4x + 10}{(x+2)^4} \cos x \, dx$, unde $x \in (-2, \infty)$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

XII.158. Considerăm $a_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin^{2n} x}{1 + \sin^{2n} x} \cdot \operatorname{ctg} x \, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

XII.159. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Demonstraţi că $2 \cdot (\int_0^1 xf(x)dx)^2 \leq \int_0^1 (1 - x^2)f^2(x)dx$.

Florin Stănescu, Găeşti

XII.160. Fie $P_k \in \mathbb{R}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că $P_k(n) = S_k(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Demonstraţi că P_k este polinom de grad $k+1$, care se divide cu $X(X+1)$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare