

XII.147. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin 4x}}} dx.$

Bogdan Victor Grigoriu

XII.148. Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ și funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 , astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstrați că

$$\min_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq \frac{2b}{b-a} \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Ionuț Ivănescu, Craiova

XII.149. Rezolvați în \mathbb{C} ecuația $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0.$

Ionel Tudor, Călugăreni

XII.150. Fie G un grup comutativ de ordin 2014 și $A = \{f_n : G \rightarrow G \mid f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}.$ Determinați numărul automorfismelor din $A.$

Cristian Lazăr, Iași

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G256. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătați că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.

Elena Iurea, Iași

G257. Fie $a, n \in \mathbb{N}$, a impar și $n \geq 2.$ Aflați restul împărțirii numărului a^n prin $\frac{a^2 + 1}{2}.$

Lucian Tuțescu, Craiova și Dumitru Săvulescu, București

G258. Determinați numerele \overline{abcde} (în baza 10), știind că $a + b + c = e$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{10}{e}.$

Cătălin Calistru, Iași

G259. Descompuneți numărul $5^{2015} - 1$ în produs de trei factori mai mari decât $5^{400}.$

Constantin Dragomir, Pitești

G260. Fie a, b, c și d numere naturale nenule disjuncte, astfel încât numărul $abcd$ să fie pătrat perfect. Demonstrați că numărul $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

G261. Determinați numerele $x \in [1, \infty)$ cu proprietatea că $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)],$ unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real $a.$

Alexandru Blaga, Satu Mare

G262. Fie ABC un triunghi, iar D, F și N mijloacele segmentelor BC, AD respectiv $AC.$ Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $G \in (BD)$ și notăm $\{M\} = DE \cap FG.$ Dacă punctele B, M și N sunt coliniare, arătați că dreptele AD și EG sunt paralele.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G263. Se consideră triunghiul ABC , O – mijlocul laturii BC , D – mijlocul segmentului AO , iar $BD \cap AC = \{E\}$. Demonstrați că $OE = 2DE$ dacă și numai dacă unghiul \hat{A} este drept.

Geanina Hăvârneanu, Iași

G264. Considerăm triunghiul ABC , D un punct situat pe latura BC , iar E și F sunt puncte pe AC , respectiv AB , astfel încât EF este antiparalelă la BC . Cercurile circumscrise triunghiurilor BDF și CDE se intersectează a doua oară în punctul M . Demonstrați că $ME = MF$ dacă și numai dacă AD este bisectoarea unghiului \widehat{BAC} .

Bogdan Ioniță, București și Titu Zvonaru, Comănești

G265. Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul \mathcal{C} . Cercul \mathcal{C}_1 este tangent cercului \mathcal{C} și segmentelor AB și BC în punctele M, L și respectiv K . Dreapta AC intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor AML și CMK în R și S , iar punctele E și F sunt mijloacele arcelor \widehat{RM} și \widehat{SM} . Arătați că punctele A, C, E și F sunt conciclice.

Neculai Roman, Mircești (Iași)

B. Nivel liceal

L256. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Arătați că axa radicală a cercurilor de diametre BC și AM trece prin ortocentrul triunghiului ABC .

Neculai Roman, Mircești (Iași)

L257. Fie ABC un triunghi în care $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ și $c < a < b$. Dreapta lui Nagel (determinată de centrul cercului circumscris și de centrul de greutate) intersectează laturile AB și AC în punctele P , respectiv Q . Demonstrați că dreptele BQ și CP se intersectează pe bisectoarea din A dacă și numai dacă a este media armonică a numerelor b și c .

Titu Zvonaru, Comănești

L258. Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA și AB în punctele D, E respectiv F . Perpendiculara în D pe BC taie EF în punctul Q și cercul înscris în P . Dacă $\{T\} = BQ \cap AC$ și $\{S\} = CQ \cap AB$, demonstrați că punctele S, P și T sunt coliniare.

Bogdan Ioniță, București

L259. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Pentru orice submulțime nevidă X a lui A , definim

$$M(X) = \{t \mid t = xy, x \in X, y \in Y = A \setminus X\}.$$

Arătați că $\max_{\emptyset \neq X \subset A} |M(X)| = 24$.

Gheorghe Iurea, Iași

L260. Spunem că numerele raționale nenule a_1, a_2, \dots, a_n formează un *grup unit* dacă $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0$ și $n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$ este număr natural pătrat perfect. Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care există grupuri unite cu n elemente.

Alexandru Blaga, Satu Mare

L261. Într-un șir de numere reale, un termen se numește *acceptabil* dacă poate fi scris ca suma câtorva termeni (nu neapărat distincți) ai șirului.

a) Dacă toți termenii șirului sunt numere naturale, cel puțin două relativ prime, atunci toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit, sunt acceptabili.

b) Dați exemplul de șir care nu are niciun termen acceptabil.

Radu Miron, elev, Iași

L262. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6,$ iar $x_{n+4} = 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n$. Arătați că $\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{n^2} = \frac{x_n x_{n+1}}{n(n+1)},$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Constantin Dragomir, Pitești

L263. Demonstrați că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea

$$\frac{8}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + \frac{abc}{2(a^3 + b^3 + c^3)} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

L264. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ sunt două matrice care comută și $\det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) + 2 = 6\det AB,$ arătați că $\det(A - B) = 0.$

Florin Stănescu, Găești

L265. Fie a_1, \dots, a_m elementele idempotente din inelul \mathbb{Z}_n . Câte dintre sumele $a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq n,$ sunt tot elemente idempotente?

Marian Tetiva, Bârlad

Training Problems for Mathematical Contests

A. Junior Highschool Level

G256. Let $p \geq 3$ be a prime number. Show that the number $p \cdot 2^n, n \in \mathbb{N},$ can be written in a unique way as a sum (of at least two terms) of consecutive natural numbers.

Elena Iurea, Iași

G257. Let $a, n \in \mathbb{N}, a$ an odd number and $n \geq 2.$ Find the remainder of the division of number a^n by $\frac{a^2 + 1}{2}.$

Lucian Tuțescu, Craiova și Dumitru Săvulescu, București

G258. Determine the numbers \overline{abcde} (written in base 10), knowing that $a + b + c = e$ and $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{10}{e}.$

Cătălin Calistru, Iași

G259. Decompose the number $5^{2015} - 1$ as a product of three factors, each of them greater than $5^{400}.$

Constantin Dragomir, Pitești

G260. Let a, b, c and d be nonzero and distinct natural numbers, so that $abcd$ be a perfect square. Prove that the number $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ can be written as a sum of five nonzero perfect squares.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

G261. Determine the numbers $x \in [1, \infty)$ with the property that $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)]$, where $[a]$ is the integer part of the real number a .

Alexandru Blaga, Satu Mare

G262. Let ABC be a triangle, and D, F and N the midpoints of the line segments BC, AD and respectively AC . We consider the points $E \in (AB)$ and $G \in (BD)$, and let us denote $\{M\} = DE \cap FG$. If the points B, M and N are collinear, show that the lines AD and EG are parallel.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

G263. The triangle ABC is considered with O – the midpoint of side BC , D – the midpoint of the line segment AO , and $BD \cap AC = \{E\}$. Prove that $OE = 2DE$ if and only if the angle \hat{A} is a right angle.

Geanina Hăvârneanu, Iași

G264. We consider the triangle ABC , D a point situated on its side BC , while E and F are points on the sides AC , respectively AB such that EF is antiparallel to BC . The circles circumscribed to the triangles BDF and CDE intersect, the second time, at the point M . Prove that $ME = MF$ if and only if AD is the bisectrix line of the angle \widehat{BAC} .

Bogdan Ioniță, București și Titu Zvonaru, Comănești

G265. We consider the triangle ABC inscribed in the circle \mathcal{C} . The circle \mathcal{C}_1 is tangent to the circle \mathcal{C} and to the segments AB and BC at the points M, L and respectively K . The straight line AC intersect the circumscribed circles to the triangles AML and CMK at the points R and S , while the points E and F are the midpoints of the arcs \widehat{RM} and \widehat{SM} . Show that the points A, C, E and F are concyclic.

Neculai Roman, Mîrcești (Iași)

B. Highschool Level

L256. Let M be the midpoint of the side BC of the triangle ABC . Show that the radical axis of the circles of diameters BC and AM passes through the orthocenter of the triangle ABC .

Neculai Roman, Mîrcești (Iași)

L257. Let ABC be a triangle in which $a = BC, b = CA, c = AB$ and $c < a < b$. The Nagel line (determined by the centre of the circumscribed circle and by the gravity centre) intersects the sides AB and AC at the points P , respectively Q . Prove that the lines BQ and CP cut each other on the bisectrix line from A if and only if a is the harmonic mean of the numbers b and c .

Titu Zvonaru, Comănești

L258. The circle inscribed in the triangle ABC is tangent to the sides BC, CA and AB at the points D, E and respectively F . The perpendicular line at D on

BC cuts EF at the point Q and the inscribed circle at P . If $\{T\} = BQ \cap AC$ and $\{S\} = CQ \cap AB$, prove that the points S, P and T are collinear.

Bogdan Ioniță, București

L259. We consider the set $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. For any nonempty subset X of A , we define

$$M(X) = \{t \mid t = xy, x \in X, y \in Y = A \setminus X\}.$$

Show that $\max_{\emptyset \neq X \subset A} |M(X)| = 24$.

Gheorghe Iurea, Iași

L260. We say that the numbers a_1, a_2, \dots, a_n form a *united group* if $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0$ and $n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$ is a perfect square natural number. Show that there exist infinitely many natural numbers n such that there exist united groups with n elements.

Alexandru Blaga, Satu Mare

L261. In a sequence of real numbers, a term is said to be *acceptable* if it can be written as the sum of a couple of terms (not necessarily distinct) of the sequence.

a) If all the terms of the sequence are natural numbers with at least two of them relatively prime, then all terms of the sequence, except a finite number of them, are acceptable.

b) Give an example of a sequence having no acceptable terms.

Radu Miron, highschool student, Iași

L262. We consider the sequence $(x_n)_{n \geq 0}$ defined by $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6$, and $x_{n+4} = 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n$. Show that $\frac{x_1^2}{1^2} + \frac{x_2^2}{2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{n^2} = \frac{x_{n+1}}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Constantin Dragomir, Pitești

L263. Prove that, if a, b, c are strictly positive real numbers, then the following inequality holds:

$$\frac{8}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + \frac{abc}{2(a^3 + b^3 + c^3)} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comănești

L264. If $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ are two commuting matrices and $\det(A^2 - AB + B^2) - \det(A^2 + AB + B^2) + 2 = 6 \det AB$, show that $\det(A - B) = 0$.

Florin Stănescu, Găești

L265. Let a_1, \dots, a_m be the idempotent elements in the ring \mathbb{Z}_n . How many of the sums $a_i + a_j, 1 \leq i < j \leq m$ are idempotent elements, too?

Marian Tetiva, Bârlad